Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 1. ZH

1. Legyen $(S, \cdot)$ egységelemes félcsoport e egységelemmel és tegyük fel, hogy minden $s \in S$-re $s^2 = e$. Mutasd meg, hogy ekkor $(S, \cdot)$ Abel-csoport.

Mutass példát ilyen nyolc elemű Abel-csoportra, vagyis amiben minden elem négyzete az egységelem (+3 pont).

Megoldás. Az asszociativitás és az egységelem létezése adott.

Inverz: Minden $s \in S$-re $s^{-1} = s$ megfelelő, mert $s \cdot s = e$.

Kommutativitás: Legyen $a, b \in S$, ekkor $e = (ab)^2 = abab$. Szorozzuk meg ezt az egyenletet balról a-val, jobbról b-vel. Kapjuk, hogy $ab = aababb = ebae = ba$.

Ilyen tulajdonságú nyolc elemű csoport a $\mathbb{Z}_2$ feletti háromdimenziós vektortér az összeadással, vagyis a három hosszú 0-1 vektorok halmaza a koordinátánkénti modulo 2 összeadással.

2. Oldd meg az $iz^6 + (-1+8i)z^3 - 8 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán és add meg a megoldásokat algebrai alakban.

Megoldás. Osszunk le i-vel ($1/i = -i$): $z^6 + (8+i)z^3 + 8i = 0$. Ez az egyenlet másodfokú z^3-re. Ha nem vesszük észre (a Viète-formulákból), hogy -8 és $-i$ a gyökök, akkor sincsen baj. Megoldóképlettel kapjuk, hogy

$$z^3 = \frac{-(8+i) \pm \sqrt{(8+i)^2 - 4 \cdot 8i}}{2} = \frac{-8 - i \pm \sqrt{63 - 16i}}{2}.$$

Mivel $63 - 16i$ argumentuma nem "szép" szög, ezért egyenlettel vonunk belőle gyököt: $(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 63 - 16i$, amiből $a^2 - b^2 = 63$ és $2ab = -16$. Tehát $a = -8/b$ és így $64/b^2 - b^2 = 63$, vagyis $0 = b^4 + 63b^2 - 64$. Itt mar éredemes észrevenni a gyököket ($b^2 = -64$ és $b^2 = 1$), kölünben kicsit kellemetlenebb fejszámolás vár ránk:

$$b^2 = \frac{-63 \pm \sqrt{63^2 + 4 \cdot 64}}{2} = \frac{-63 \pm 65}{2} = 1 \text{ és } -64.$$

$b^2 \geq 0$ ezért $b^2 = 1$ így $b = \pm 1$ és $a = \mp 8$, tehát $\sqrt{63 - 16i} = \pm(8 - i)$, amiből $z^3 = \frac{-8-i\pm(8-i)}{2} = -i$ és -8. Ezekből harmadik gyököt vonva kapjuk a megoldásokat:

$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}$, ahol $k = 0, 1, 2$, és hasonlóan

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$, ahol $k = 0, 1, 2$.

Végül a megoldások: $z_0 = i$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_4 = -2$, $z_5 = 1 - \sqrt{3}i$.

3. Adj meg olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektort, mely az $(1, -1, 0)$ és $(1, 0, 1)$ vektorral is $120°$-os szöget zár be.

Megoldás. Legyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$. $\mathbf{v}$ pontosan akkor zár be $120°$-os szöget a megadott vektorokkat, ha teljesülnek a következők:

$$\mathbf{v}(1, -1, 0) = x - y = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{2}\cos 120°$$
$$\mathbf{v}(1, 0, 1) = x + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{2}\cos 120°$$

Ha van ilyen $\mathbf{v}$, akkor végtelen sok van, ezért nem meglepő, ha például x-et előre rögzítjük és reménykedünk, hogy lesz megoldás. Legyen $x = 0$. Ekkor a jobb oldalak egyenlősége miatt $z = -y$, amit a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $z = \sqrt{2z^2}\sqrt{2}\frac{-1}{2} = -|z|$. Tehát bármilyen negatív z esetén $(0, -z, z)$ megoldás, legyen például $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$.

4. Bontsd fel a $2x^6 - 8x^4 + 7x^3 - 16x^2 + 7x - 6$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilisek szorzatára.

Megoldás. A racionális gyökteszt felhasználásával és próbálgatással kapjuk, hogy $x = 2$ gyök, tehát $(x-2)$ kiemelhető:

$$2x^6 - 8x^4 + 7x^3 - 16x^2 + 7x - 6 = (x-2)(2x^5 + 4x^4 + 7x^2 - 2x + 3).$$

Mielőtt törtekkel próbálkoznánk érdemes behelyettesíteni az i-t, és kapjuk, hogy gyök, amiből $-i$ is gyök, vagyis x^2+1 is kiemelhető:

$$2x^5 + 4x^4 + 7x^2 - 2x + 3 = (x^2+1)(2x^3 + 4x^2 - 2x + 3).$$

A fordított Schönemann-Eisenstein-féle kritérium ($p = 2$) miatt $2x^3+4x^2-2x+3$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, így a keresett felbontás $(x-2)(x^2+1)(2x^3+4x^2-2x+3)$.

5. Tekintsük az $f(z) = 1/\overline{z}$ függvényt $\mathbb{C}\backslash\{0\}$-n (*inverzió*).

(a) Mi a képe ennél a leképezésnél egy 0-n átmenő egyenesnek (a 0 nélkül)? (2 pont)

(b) Hova képezi f az egység sugarú körlap belsejét (a 0 nélkül), vagyis mi lesz

$$f\left(\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}\right)? \text{ (2 pont)}$$

(c) Mutasd meg, hogy minden 0-n átmenő körvonal képe (0 nélkül természetesen) egy 0-n át nem menő egyenes (6 pont).

Megoldás. Trigonometrikus alakban, ha $r > 0$, akkor

$$f\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right) = \frac{1}{\overline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}} = \frac{1}{r\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

(a): Egy 0-n átmenő egyenes pontjait meghatározza az egyenes szöge, így ennek képe saját maga (a 0 nélkül) mert $\frac{1}{r}$ tetszőleges pozitív szám lehet, ha r végigfut a pozitív számokon.

(b): A zárt körlap külsejére, mert $\frac{1}{r} > 1 \iff 0 < r < 1$.

(c): A trükk az, hogy nem érdemes a képlettel kell számolni, hanem egy egyszerű rajzban két háromszög hasonlósága adja a feladat ezen részét.

6. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések segítségével mutasd meg, hogy az $x^5 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 + x - 7 \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ polinomnak nem lehet minden gyöke valós szám.

Megoldás. Legyenek a gyökök $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$. Ekkor $-a-b-c-d-e = -1$ és a gyökökből képzett kéttényezős szorzatok összege pedig 4, amiből $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 1^2 - 2\cdot 4 = -7$. Innen már látszik, hogy nem lehet minden gyök valós szám mert akkor a négyzetösszegük nemnegatív valós szám lenne.