1. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

Emlékeztető: $(R, +, \cdot)$ *gyűrű*, ha $+$ és $\cdot$ kétváltozó műveletek R-en, melyekre:

- $+$ és $\cdot$ assziciatív: $\forall\, a, b, c \in R\ \big(a + (b + c) = (a + b) + c$ és $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\big)$.
- Létezik $+$-ra nézve nullelem $\exists\, n \in R\ \forall\, a \in R\ a + n = n + a = a$ (ez egyértelmű).
- Létezik $+$-ra nézve ellentett: $\forall\, a \in R\ \exists\, b \in R\ a + b = b + a = n$ (ez is egyértelmű, jelölés: $b = -a$).
- $+$ kommutatív: $\forall\, a, b \in R\ a + b = b + a$.
- Disztributivitás: $\forall\, a, b, c \in R\ \big((a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ és $c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)\big)$.

R kommutatív gyűrű, ha $\forall\, a, b \in R\ a \cdot b = b \cdot a$. R egységelemes gyűrű, ha $\exists\, e \in R\ \forall\, a \in R$ $a \cdot e = e \cdot a = a$ (ez is egyértelmű). R egy *(ferde)test*, ha (kommutatív) egységelemes és létezik $\cdot$-ra nézve inverz: $\forall\, a \in R \backslash \{0\}\ \exists\, b \in R\ a \cdot b = b \cdot a = e$ (ez is egyértelmű, $b = a^{-1}$).

1. Idézzük föl az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható kombinatorikus definícióját és a képletét, továbbá a binomiális tételt, majd oldjuk meg a következő feladatokat:

(a) Egy n elemű halmaznak hány részhalmaza van?

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =?$

(c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} =?$

(d) Egy n elemű halmaznak hány páros elemszámú részhalmaza van?

(e) Bizonyítsd be a definícióból és a képletből is az $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ azonosságot.

2. 10 doboz ugyanolyan sört hányféleképpen oszthatok szét 20 ember között, ha egy ember maximum egyet kaphat? És ha egy ember kaphat többet is?

3. Bizonyítsd be teljes indukcióval, hogy

(a) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$, (b) $\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, (c) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

4. Legyen $(R, +, \cdot)$ egy gyűrű, 0 a nullelem. Bizonyítsd be a következőket:

(a) Minden $a \in R$-re $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(b) Minden $a, b \in R$-re $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

(c) Ha R (ferde)test, akkor nullosztómentes, vagyis minden $a, b \in R$-re $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0$ vagy $b = 0)$.

(d) Ha R rendezett gyűrű (vagyis adott R-en egy $<$ lineáris rendezés (irreflexív, tranzitív, és trichotóm reláció), melyre minden $a, b, c \in R$ esetén $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, és ha $c > 0$, akkor $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$), akkor R nullosztómentes.

5. Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{R}^2$ egységelemes kommutatív gyűrű a koordinántánkénti műveletekkel, de nem rendezhető.

6. Bizonyítsd be, hogy ha $T \subseteq \mathbb{R}$ és T test $\mathbb{R}$ műveleteivel, akkor $\mathbb{Q} \subseteq T$.

7. Bizonyítsd be, hogy az $\{a+b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ testet alkot a valós számok szokásos műveleteivel. Mutasd meg, hogy $\sqrt{3}$ nem eleme ennek a halmaznak.

8.* Bizonyítsd be, hogy az $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz nem test a valós számok műveleteivel. Mi a legszűkebb részteste a valós számoknak amely tartalmazza ezt a halmazt?

9. Bizonyítsd be, hogy ha p prím, akkor az $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy test a modulo p végzett összeadással és szorzással.