10. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Határozd meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 10 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix rangját és oldd meg az $A\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ lineáris egyenletrendszert.

2. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén az alábbiak ekvivalensek:

(i) $\mathrm{rang}(A) = n$;

(ii) $\exists!\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n\ A\underline{x} = \underline{0}$;

(iii) $\forall\ \underline{b} \in \mathbb{R}^n\ \exists!\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n\ A\underline{x} = \underline{b}$.

3. A Cramer-szabály segítségével oldd meg az $x + 2y - z = 3$, $2x + y + 3z = 0$, $-x + y + z = 1$ egyenletrendszert.

4. Határozd meg az alábbi mátrixok illetve transzformációk sajátértékeit és sajátvertorait.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{C}$ fölött;

(c) $\mathbb{R}^3$ merőleges vetítése az $(1, 2, 2)$ irányvektorú origón átmenő egyenesre;

(d) $\mathbb{R}^3$ elforgatása az x tengely körül $\frac{\pi}{2}$-vel;

(e) transzponálás a 2×2-es valós mátrixok terén;

(f) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

(a) 3×3-as valós felsőháromszög mátrixok a szokásos műveletekkel;

(b) invertálható 2×2-es mátrixok;

(c) legföljebb 4-edfokú valós együtthatós polinomok;

(d) legföljebb 4-edfokú komplex együtthatós polinomok a szokásos összeadásra és valós számmal szorzásara nézve;

(e) azok a valós együtthatós polinomok, melyekben csak páros fokú tagok szerepelnek;

(f) $\mathbb{R}^2$ az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadással és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzással;

(g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = -3z\}$ a szokásos műveletekkel.

6. Bizonyítsd be, hogy ha a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok közül csak $\underline{v}_k$ állítható elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\underline{v}_k = \underline{0}$ és a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1}$ vektorok függtelenek.

7. Mutasd meg, hogy a $(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben és add meg a $(3, 2, 1)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

HF. Keress egy olyan vektort az $\mathbb{R}^4$ vektrotérben, amely az $(1, 2, -1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ és $(0, 1, -1, 3)$ vektorokkal bázist alkot.

HF. Hogyan változhat meg egy mátrix rangja, ha minden eleméhez hozzáadjuk ugyanazt a számot?