11. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Mely leképezések lineárisak az alábbiak közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

(a) $\mathbb{R}^2$ tükrözése az $x = 2$ egyenesre;

(b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, y + z)$;

(c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(\underline{v}) = \|\underline{v}\|$;

(d) az $n \times n$-es valós mátrixok mellékátlóra tükrözése;

(e) adott $a + bi$ komplex számmal való szorzás $\mathbb{C}$-n mint valós vektortéren;

(f) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha egy vektortérben nincs 5 elemű generátorrendszer, akkor van benne 6 elemű független rendszer.

(b) Ha egy 10 elemű vektorrendszer minden 9 elemű részhalmaza független rendszer, akkor az eredeti 10 elem is függetelen rendszert alkot.

(c) n dimenziós térben egy generátorrendszer rangja n.

(d) Minden 3×3-as mátrixnak van sajátértéke.

(e) Ha $\underline{v}$ sajátvektora φ-nek, akkor φ^2-nek is.

(f) Ha $\underline{v}$ sajátvektora φ^2-nek, akkor φ-nek is.

3. Add meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát az adott bázis(pár)ban:

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \langle (1, 2), (1, 1) \rangle$;

(b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(1, 2, 1) = (0, 2, 1)$, $\varphi(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $\varphi(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ a standard bázisban;

(c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x+y, y, x)$, $B_1 = \langle (1, 1), (2, 0) \rangle$ és $B_2 = \langle (1, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$;

(d) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban.

4. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ egy lineáris transzformáció. Lehet-e a $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ leképezések rangja a következő sorozat?

(a) $3, 4, 2, 2$; (b) $6, 5, 4, 3$; (c) $5, 4, 4, 4$; (d) $5, 3, 2, 1$; (e) $3, 2, 1, 0$.

5. Melyek azok a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációk, melyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora? Mit alkotnak ezek a transzformációk?

HF. Válassz ki egy bázis $\mathbb{R}^4$ következő generátorrendszeréből: $\{(1, 1, -0, 0)$, $(2, 1, 3, 2)$, $(0, -1, 5, 2)$, $(-2, -2, 2, 0)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(0, 1, 0, 1)\}$.

HF. Add meg a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok terén adott $p(x) \mapsto (xp(x))'$ lineáris transzformáció mátrixát a standard $\{1, x, x^2\}$ és az $\{x + 1, 1 - x^2, x\}$ bázisban is.