

## 12. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Add meg az alábbi lineáris leképezések illetve mátrixok kép- és magterének egy-egy bázisát.

(a)  $\mathbb{R}^3$  forgatása az  $x = y = z$  egyenes körül  $\frac{\pi}{2}$ -vel;

(b)  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $\varphi(x, y, z, v) = (x + y, 0, y + z - v, x)$ ;

(c)  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

(d)  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ;

(e)  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\underline{v} \mapsto \underline{a} \times \underline{v}$ , ahol  $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$  fix;

(f)  $\mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ ,  $f \mapsto f'$ ;

(g)  $\mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$ .

2. Mutass példát olyan  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineáris leképezésre, melyre igazak a következők:

(a)  $n = 4$ ,  $k = 3$  és  $\text{Ker}(\varphi) = \{(x, y, z, v) : x + y - v = 0\}$ ;

(b)  $n = 3$ ,  $k = 5$  és  $\text{Im}(\varphi) = \{(x, y, z, v, w) : x = z = 0, y + v + w = 0\}$ ;

(c)  $0 < m < n$  és  $\dim \text{Ker}(\varphi) = m$ ;

(d)  $n = 4$ ,  $k = 4$  és  $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$ .

3. Határozd meg  $\alpha$  és  $\beta$  függvényében az alábbi lineáris leképezés és mátrix magjának dimenzióját:

(a)  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(x, y, z, v) = (\alpha x + y, y, (\alpha - 1)v - z)$ ;

(b)  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & \alpha \\ \beta & -3 & \beta \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ .

4. Keresd meg azt a  $3 \times 3$ -as mátrixok, melynek sajátértékei 1, 2 és 3, a hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig  $\underline{v}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\underline{v}_2 = (0, 1, -1)$ , és  $\underline{v}_3 = (1, 0, 2)$ .

**HF.** Mely  $V \leq \mathbb{R}^5$  alterekhez létezik  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  lineáris transzformáció, melyre  $\text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = V$ ?

**HF.** Legyen  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(x, y, z) = (2x - 4y - 2z, 4y + z, -4y)$ . Határozd meg  $\varphi$  sajátértékeit, sajátvektorait, kép- és magterét, ezek dimenzióját, továbbá adj meg bázisokat a sajátalterekben illetve a kép- és magtérben.