2. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

Néhány megoldás

1. (a) $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nem is algebrai struktúra, hiszen a skaláris szorzás nem művelet $\mathbb{R}^3$-n, kivezet belőle.

(b) $(\mathcal{P}(A), \cap)$ kommutatív egységelemes félcsoport, mert $\cap$ nyilván kommutatív és asszociatív, az egységelem A (ha $X \subseteq A$, akkor $X \cap A = X$). Ez a félcsoport általában nem csoport, mert ha $A \neq \emptyset$ és $X \subsetneq A$, akkor X-nek nincsen inverze, hiszen minden Y-ra $X \cap Y \subsetneq A$.

(c) $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ kommutatív csoport: az asszociativitás Venn-diagrammal könnyen ellenőrizhető, a kommutativitás triviális, az egységelem $\emptyset$, egy $X \subseteq A$ inverze pedig saját maga X, mert $X \triangle X = \emptyset$.

(d) $(X^X, \circ)$ egységelem félcsoport, ami $|X| > 1$ esetén nem kommutatív és nem csoport: $((f\circ g)\circ h)(x) = (f\circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g\circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$, az egységelem $\mathrm{id}_X(x) = x$. Ha $a, b \in X$ különböző elemek, akkor $f(a) = f(b) = a$ és $g(a) = b$, $g(b) = a$ függvények esetén $(f \circ g)(b) = a$, de $(g \circ f)(b) = b$, így $f \circ g \neq g \circ f$.

Továbbá ekkor f-nek nincsen inverze, hiszen ha $g \in X^X$, akkor $(g\circ f)(a) = (g \circ f)(b) = g(a)$, de $g(a)$ nem lehet egyszerre egyenlő a-val és b-vel is, vagyis $g \circ f \neq \mathrm{id}_X$.

(e) $(S(X), \circ)$ csoport, ami $|X| > 2$ esetén nem kommutatív.

2. Legyen $a, b \in G$ tetszőleges. Ekkor $e = (ab)^2 = abab$, amit jobbról $b = b^{-1}$-gyel, balról $a = a^{-1}$-gyel szorozva $ab = ba$-t kapunk.

3. Legyen $(B, \wedge, \vee)$ egy Boole-algebra ($\wedge$ a "szorzás", $\vee$ az "összeadás"). $a + b = (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})$ és $a \cdot b = a \wedge b$.

A szorzás $(\cdot)$ nyilván asszociatív és kommutatív. Az összeadás $(+)$ is kommutatív.

Az összeadás asszociatív (mint a szimmetrikus differencia az **1.** (c)-ben):

$$(a + b) + c = \big((a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})\big) + c =$$

$$\Big[\big((a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})\big) \wedge \bar{c}\Big] \vee \Big[c \wedge \overline{\big((a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})\big)}\Big] =^{\text{diszt. és De-Morgan}}$$

$$\Big[\big(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}\big) \vee \big(b \wedge \bar{a} \wedge \bar{c}\big)\Big] \vee \Big[c \wedge \big(\overline{(a \wedge \bar{b})} \wedge \overline{(b \wedge \bar{a})}\big)\Big] =^{\text{De-Morgan}}$$

$$(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{c}) \vee \Big[c \wedge \big((\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)\big)\Big].$$

Mielőtt tovább alakítjuk vegyük észre, hogy $(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a) =^{\text{diszt.}} \big((\bar{a} \vee b) \wedge \bar{b}\big) \vee \big(\big((\bar{a} \vee b) \wedge a\big) =^{\text{diszt.}} \big((\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})\big) \vee \big((\bar{a} \wedge a) \vee (b \wedge a)\big) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge a)$, mivel $b \wedge \bar{b} = 0$ és $\bar{a} \wedge a = 0$. Tehát $(a + b) + c$ tovább egyenlő:

$$(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{c}) \vee \Big[c \wedge \big((\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \vee a)\big)\Big] =^{\text{diszt.}}$$

$$(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{c}) \vee \Big[(c \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge b \wedge a)\Big] =$$

$$(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{c}) \vee (c \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge b \wedge a),$$

ami nem függ az a, b, c sorrendjétől.

A disztributivitás is hasonlóan ellenőrizhető.

A null elem 0, a ellentetje a, és az egységelem 1.

Ha $|B| > 2$, akkor ez a gyűrű nem nullosztómentes, mert $a \cdot \bar{a} = 0$ minden $a \in B \backslash \{0, 1\}$-re