2. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Félcsoport, csoport, vagy egyik sem? Ha félcsoport, akkor van-e benne egységelem? Kommutatív-e a művelet?

(a) $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ahol $\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle$ a szokásos skalárszorzás;

(b) $(\mathcal{P}(A), \cup)$; $(\mathcal{P}(A), \cap)$; $(\mathcal{P}(A), \setminus)$;

(c) $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ ahol $\triangle$ a szimmetrikus differencia: $X \triangle Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$;

(d) $(X^X, \circ)$ ahol X^X az $X \to X$ függvények halmaza, $\circ$ pedig a kompozíció;

(e) $(S(X), \circ)$ ahol $S(X)$ az X halmaz permutációianak, vagyis az $X \to X$ bijekciók halmaza;

(f) $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ és $(\mathbb{Z}_n, \odot)$ ahol $\oplus$ és $\odot$ a modulo n összeadás és szorzás.

2. Bizonyítsd be, hogy ha egy G csoportban minden $g \in G$-re $g^2 = e$, akkor G kommutatív.

3. Legyen $(B, \wedge, \vee)$ egy Boole-algebra. Minden $a, b \in B$-re legyen $a+b = (a\wedge \bar{b})\vee(b\wedge\bar{a})$ és $a\cdot b = a\wedge b$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $(B, +, \cdot)$ egy kommutatív gyűrű. Ki a gyűrű null eleme? Van-e egységelem? Nullosztómentes-e? Test-e?

4. Legyen $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ és $n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Fejezzük ki az $[\underline{a}, \underline{b}]$ szakaszt $n : m$ arányban kettévágó $\underline{c}$ pontot (vektort).

5. Mutasd meg, hogy a tetraéder súlyvonalai negyedelik egymást.

6. Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ egy szabályos origó középpontú n-szög csúcsai a síkon. Mennyi $\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \cdots + \underline{a}_n$?

HF. Bizonyítsd be teljes indukcióval, hogy $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

HF. Bizonyítsd be, hogy véges nullosztómentes gyűrű (ferde)test. (Később az is ki fog derülni, hogy kommutatív is, vagyis test.)