3. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Függetlenek-e az $(1, 2, -3)$, $(2, 0, 5)$ és $(-1, -1, 0)$ vektorok?

2. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ független vektorok egy fix V vektortérben. Függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek:

(a) $\underline{a}$, $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$;

(b) $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$;

(c) $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{b} - \underline{c}$, $\underline{c} - \underline{a}$;

(d) $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $\underline{0}$, $\underline{b}$;

(e) $\underline{a}$, $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$?

3. Legyen $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ egy egység oldalú kocka $\mathbb{R}^3$-ben. Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C_1C}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC_1}$.

4. Legyen $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 3, -1)$, $C = (1, 1, 1)$, és $D = (0, 4, 1)$. Számítsd ki az $ABCD$ teraéder térfogatát a vegyesszorzat segítségével.

5. Igazold az $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\underline{c})\underline{a}$ összefüggést tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ esetén.

6. Legyen $\underline{a} \perp \underline{b}$. $\underline{a} \times (\underline{a} \times (\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b}))) =?$

7. Végezd el a műveleteket:

$$\text{(a) } (3-4i)(7+8i); \quad \text{(b) } \tfrac{3-4i}{2-i}; \quad \text{(c) } i^{1234}; \quad \text{(d) } (1+i)^9;$$

$$\text{(e) } \tfrac{u}{\overline{u}} \text{ ahol } u = 2 - i; \quad \text{(f) } |2z - z\overline{u}| \text{ ahol } z = 1 + 3i,\ u = 2 - i.$$

8. Mi a geometriai jelentése az alábbi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezéseknek:

(a) $z \mapsto iz$;

(b) $z \mapsto \overline{z}$?

HF. Legyenek $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ független vektorok. Függetlenek-e a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $\underline{v}_2 + \underline{v}_3$, $\underline{v}_3 - \underline{v}_4, \ldots$, $\underline{v}_k + (-1)^k \underline{v}_{k+1}, \ldots$, $\underline{v}_n + (-1)^n \underline{v}_1$ vektorok?

HF. Bizonyítsd be vektoralgebrai eszkozökkel, hogy a parallelogramma oldalhosszainak négyzetösszege megegyezik az átlók hosszának négyzetösszegével.