5. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Oszdd el maradékosan az $x^5 - 3x^4 + 2x + 1$ polinomot a következő polinomokkal:

(a) $x^2 + 2x - 3$;

(b) $x - 2$;

(c) $x^2 - 4$.

2. Számítsd ki az $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2$ és a $g(x) = x^4 + 2x^2 + x + 2$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

3. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

(a) Ha $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és $f(x) \mid_{\mathbb{R}[x]} g(x)$, akkor $f(x) \mid_{\mathbb{Q}[x]} g(x)$.

(b) Ha $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(x) \mid_{\mathbb{Q}[x]} g(x)$, akkor $f(x) \mid_{\mathbb{Z}[x]} g(x)$.

4. Bizonyítsd be hogy ha az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak gyöke a $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ racionális szám, $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha egy $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ valós együtthatós polinomnak gyöke egy $z \in \mathbb{C}$ komplex szám, vagyis $f(z) = 0$, akkor $\bar{z}$ is gyöke f-nek.

6.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha egy $f(x) \in K[x]$ legfeljebb 3-adfokú polinomnak nincsen gyöke K-ban, akkor irreducibilis.

(b) Mutass példát olyan $\mathbb{Z}[x]$-beli 3-adfokú polinomra, melynek nincsen gyöke $\mathbb{Z}$-ben, de nem irreducibilis.

(c) Mutass példát olyan $\mathbb{R}[x]$-beli 4-edfokú polinomra, melynek nincsen gyöke $\mathbb{R}$-ben, de nem irreducibilis.

7. Bontsd fel a $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben.

8. Add meg a következő polinomok gyöktényezős alakját:

$$\text{(a) } x^3 - 1; \quad \text{(b) } x^4 + 1, \quad \text{(c) } x^n - 1; \quad \text{(d) } x^n + 1$$

$$\text{(e) } x^6 - x^4 + 2; \quad \text{(f) } x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

9*. Bizonyítsd be, hogy nincsen olyan nem konstans $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, mely valamikortól kezdve mindig prímszámot vesz fel, vagyis valamely $N \in \mathbb{N}$-től kezdve minden $n \geq N$ esetén $f(n)$ prím.

HF. Tegyük fel, hogy $f(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ továbbá hogy $f(x)g(x) = h(x)$. Igaz-e, hogy ekkor $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$?

HF. Bontsd fel $\mathbb{C}$ fölött elsőfokú tényezők szorzatára a $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$ polinomot.