

7. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Adj meg olyan f harmadfokú racionális együtthatós polinomot, melyre $f(1) = 5$, $f(6) = -2$, $f(8) = 1$ és $f(-3) = -3$.

2. Bontsd fel $\mathbb{Q}[x]$ -ben irreducibilisek szorzatára az $x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 104x - 338$ illetve a $3x^3 - 15x^2 + 9x + 10$ polinomokat.

3. Add meg az összes legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_3[x]$ -ben.

4. Bizonyítsd be, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}[x]$ -ben a \mathbb{Z}_2 illetve \mathbb{Z}_3 fölötti irreducibilitás vizsgálatával.

$$(a) x^4 - 5x^3 + 2x + 1; \quad (b) x^4 - 2x^3 + 2x + 1; \quad (c) x^4 + x^3 + x + 2.$$

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ és $\underline{a} = (1, 0, -3)$. Végezd el az alábbi műveleteket, ha értelmesek.

(a) AB ; (b) $A + A^T$; (c) BA ; (d) $B\underline{a}$; (e) $B^T A$; (f) $A\underline{a}$; (g) $\underline{a}^T B^T$; (h) $A^2 B^T - 3B^T$.

6. Számold ki a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és a $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok 101. hatványát.

7. Old meg az $x + 2y - z = 2$, $3x - y + 2z = 7$, $x - z = -2$, $2x + y + z = 7$ egyenletrendszert. Módosítsd egy együttható megváltoztatásával úgy, hogy 0, 1 illetve ∞ sok megoldása legyen.

8. Mennyi az összes olyan $k \times n$ -es mátrix összege, melyekben csak 0 és 1 fordul elő?

9. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsd el, hogy az alábbiak közül melyek igazak.

(a) $k \leq n \Rightarrow \exists$ megoldás.

(b) $k > n \Rightarrow \nexists$ megoldás.

(c) $k < n$ és \exists megoldás $\Rightarrow \exists \infty$ sok megoldás.

(d) $k > n$ és \exists megoldás $\Rightarrow \exists!$ megoldás.

(e) \exists megoldás $\in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists$ megoldás $\in \mathbb{Q}^n$.

(f) $(\forall k - 1$ egyenletnek \exists megoldása) $\Rightarrow \exists$ megoldás.

HF. Legyenek a, b, c az $x^3 - x^2 + 3x + 6$ polinom komplex gyökei. Határozd meg az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ kifejezés értékét.

HF. Határozd meg az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix n . hatványát.