8. Lineáris Algebra gyakorlat (2009/2010 ősz)

1. Bizonyítsd be, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege 0.

2. Mi a hatása a következő függvényeknek?

(a) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\underline{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$;

(b) $\mathbb{R}^{4\times 4} \to \mathbb{R}^{4\times 4}$, $X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$;

(c) $\mathbb{R}^{4\times 4} \to \mathbb{R}^{4\times 4}$, $X \mapsto X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Határozd meg az inverziók számát a következő permutációkban:

(a) $2, 1, 3, 4$; (b) $4, 3, 2, 1$; (c) $n, n-1, \dots, 1$; (d) $n+1, n+2, \dots, 2n, 1, 2, \dots, n$.

4. Mi lehet egy olyan $n \times n$-es mátrix determinánsa, melynek minden sora számtani sorozat?

5. Számítsd ki az alábbi $n \times n$-es mátrixok determinánsát:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det A = 3$. Mennyi $\det(2A^{-1})$ illetve $\det(A^2 A^T A^{-1})$?

7. Számold ki az alábbi mátrixok inverzét, ha létezik.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} i+1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

HF. Mutass példát olyan $n \times n$-es A mátrixra, melyre

(a) $A^2 = I$, de $A \neq \pm I$;

(b) $A^2 = 0$, de $A \neq 0$;

(c) $A^2 = A$, de $A \neq 0, I$.

HF. Határozd meg az $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát.