11. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. Melyek azok a Gauss-egészek, amelyek oszthatók $1+i$-vel?

2. Igazoljuk az alábbi Gauss-egészekre vonatkozó állításokat:

(a) $\alpha \mid \beta$ pontosan akkor, ha $\overline{\alpha} \mid \overline{\beta}$.

(b) $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \overline{(\alpha, \beta)}$.

(c) α pontosan akkor Gauss-prím, ha $\overline{\alpha}$ Gauss-prím.

(d) Ha $\alpha \mid \overline{\alpha}$, akkor $|\mathrm{Re}(\alpha)| = |\mathrm{Im}(\alpha)|$ vagy $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$ vagy $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$.

(e) Ha $(N(\alpha), N(\beta)) = 1$, akkor $(\alpha, \beta) = 1$.

(f) Amennyiben $N(\alpha)$ prím, akkor α Gauss-prím.

3. Van-e olyan f additív vagy multiplikatív számelméleti függvény, amelyre $f(6) = 0$, $f(10) = 1$ és $f(15) = 3$.

4. Jelölje PH a prímhatványok halmazát. Bizonyítsd be, hogy minden h : PH $\to \mathbb{C}$ függvényhez léteznek egyértelműen f multiplikatív és g additív számelméleti függvények, melyekre $f \restriction \mathrm{PH} = h = g \restriction \mathrm{PH}$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha $(a, b) > 1$, akkor $\sigma(ab) < \sigma(a)\sigma(b)$.

6. Mi az értékkészlete a $g(n) = \sum_{k \mid 100!} \mu(kn)$ függvénynek?

7. Bizonyítsd be, hogy a primitív n-edik egységgyökök összege $\mu(n)$.

8. Bizonyítsd be, hogy $\sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

9*. Mely Gauss-egészek írhatók fel két Gauss-egész négyzetösszegeként?

HF. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ valós szám esetén legyen $\sigma_r(n) = \sum_{d \mid n} d^r$ számelméleti függvény. Igazoljuk, hogy σ_r multiplikatív és adjunk képletet $\sigma_r(n)$-re n kanonikus alakjának ismeretében.