2. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. Az Euklideszi Algoritmus segítségével határozd meg a $(693, 147)$ legnagyobb közös osztót. Add meg a $693x + 147y = (693, 147)$ diofantikus egyenlet egy megoldását.

2. Ha adott $a, b, c \in \mathbb{Z}$ és az $ax + by = c$ diofantikus egyenletnek létezik megoldása (vagyis $(a, b) \mid c$), akkor hány megoldáspár létezik?

3. Bizonyítsd be, hogy minden $n > 0$-ra relatív prímek az alábbi párok:

(a) $6n + 5$ és $7n + 6$,

(b) $3n^2 + 1$ és $4n^2 + 3$,

(c) $7^n - 2$ és $7^{n+1} - 5$.

4. Ha $(a, b) = 5$, akkor mi lehet

(a) $(a + b, a - b)$,

(b) $(a + 2b, 4a - b)$?

5. Milyen n természetes számra prím

(a) $n^3 - n + 3$,

(b) $n^3 - 27$,

(c) $n^4 + 4$?

6. Legyen $a, k > 1$ természetes számok. Bizonyítsd be, hogy ekkor

(a) ha $a^k - 1$ prím (Mersenne-prímek), akkor $a = 2$ és k prím,

(b) ha $a^k + 1$ prím (Fermat-prímek), akkor k 2-nek hatványa.

7. Milyen $p, q, r > 0$ prímekre teljesül, hogy

$$\frac{1}{p - q - r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}?$$

8. Old meg az alábbi lineáris rekurziókat:

(a) $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$, ha $n \geq 2$, továbbá $a_0 = 1$ és $a_1 = -1$;

(b) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ amennyiben $n \geq 3$, és $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

9. Bizonyítsd be, hogy

(a) $360 \mid a^6 + 85a^4 + 994a^2$ minden a természetes számra;

(b) ha $(ab, 42) = 1$, akkor $504 \mid a^6 - b^6$.

10.* Igazold, hogy az $n! + 1, \ldots, n! + n$ egészek mindegyikének van olyan prímosztója, amely a többi $n - 1$ szám közül egyiket sem osztja.

HF. Hány nullára végződik

(a) $1111!$;

(b) $\binom{125}{60}$?