

4. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. Határozd meg m -et, ha a következő számok ugyanannak a redukált maradékosztálynak az elemei mod m

(a) 2 és 14,

(b) 18, 78 és 178.

2. Mennyi $\varphi(8800)$?

3. Bizonyítsd be, hogy minden n természetes számra

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

4. Bizonyítsd be, hogy minden n -re $13 \mid n^{20} + 4n^{44} + 8n^{80}$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha m páratlan és osztója egy $n^2 + 1$ alakú számnak, akkor $4k + 1$ alakú.

6. Bizonyítsd be a szita formula segítségével, hogy ha n különböző prímosztói p_1, \dots, p_r , akkor

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

7. Bizonyítsd be, hogy ha $19 \mid a^{40} + b^{40}$, akkor $19 \mid a$ és $19 \mid b$ is teljesül ($a, b \in \mathbb{N}$).

8* Adott $r_1, \dots, r_{\varphi(m)}$ redukált maradékrendszer mod m .

(a) Határozd meg az összes olyan a természetes számot, amelyre $ar_1, \dots, ar_{\varphi(m)}$ redukált maradékrendszer mod m .

(b) Határozd meg az összes olyan b természetes számot, amelyre $r_1 + b, \dots, r_{\varphi(m)} + b$ redukált maradékrendszer mod m .

HF. Legyen a és m rögzített természetes számok. Jelölje $f(b)$ az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia (mod m) megoldásainak a számát. Határozd meg a $\sum_{b=1}^m f(b)$ összeget.