

## 8. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. Old meg az  $x^6 + 4x \equiv 3 \pmod{7^2}$  (prímhatvány modulusú) kongruenciát.

2. Melyek oldhatók meg az alábbi kongruenciák közül?

(a)  $x^2 \equiv 66 \pmod{191}$ .

(b)  $x^2 \equiv 7! \pmod{83}$ .

(c)  $x^2 \equiv 30 \pmod{77}$ .

3. Bizonyítsd be, hogy  $77 \mid a^2 + b^2$  esetén  $77^2 \mid a^2 + b^2$ .

4. Bizonyítsd be, hogy a mod  $p$  pártalan rendű elemek kvadratikus maradékok illetve, hogy a primitív gyökök mod  $p$  kvadratikus nemmaradékok. Milyen  $p$ -re igaz az első állítás megfordítása, vagyis hogy a kvadratikus maradékok mod  $p$  pont a pártalan rendű elemek?

5. Bizonyítsd be, hogy ha  $p = 4k \pm 1$ , akkor az  $x^2 \equiv k \pmod{p}$  kongruencia megoldható.

6. Megoldható-e az  $x^2 \equiv 2342 \pmod{11239}$  kongruencia (11239 prím)?

**HF.** Legyen  $p > 2$  prím. Határozd meg a  $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{k}{p}$  összeget illetve a  $\prod_{k=1}^{p-1} \binom{k}{p}$  szorzatot.