1. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Mutasd meg, hogy minden n és m természetes számra

(a) $7 \mid 2^{3n+1} + 5$;

(b) $360 \mid n^6 + 85n^4 + 994n^2$;

(c) $30 \mid mn(m^4 - n^4)$.

2. Mutasd meg, hogy az alábbi számpárok minden $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ esetén relatív prímek:

(a) $6n + 5$ és $7n + 6$;

(b) $5^n - 1$ és $5^{n+2} - 20$;

(c) $n^3 + 2n$ és $n^4 + 3n^2 + 1$;

(d) $6^{2^n} + 1$ és $6^{2^{n+1}} + 1$.

3. Mutasd meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$-ra $196 \mid 147^n + 7^{3n-1}$.

4. Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám, vagyis $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazold az alábbi összefüggéseket:

(a) $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$;

(b) $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$;

(c) $F_n \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$ ha $n \geq 1$;

(d) $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$ ha $k \geq 1$;

(e) $F_n \mid F_{kn}$ ha $k \geq 1$.

5.* Bizonyítsd be, hogy $F_{n+1} = \sum \left\{ \binom{\ell}{k} : \ell \geq k \geq 0 \text{ és } \ell + k = n \right\}$.

6. Legyenek $a, k > 1$ egészek. Igazold, hogy

(a) ha $a^k - 1$ prím, akkor $a = 2$ és k prím (Mersenne-prímek);

(b) ha $a^k + 1$ prím, akkor k kettőhatvány (Fermat-prímek, ha $a = 2$).

1. HF. Mutasd meg, hogy $n! - 1$ és $(n+1)! - 1$ relatív prímek minden $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$-ra.

2. HF. Bizonyítsd be, hogy minden pozitív természetes szám előáll különböző Fibonacci-számok összegeként. (Ötlet: Ne mély elméleti tételekre gondoljunk, hanem egy egyszerű konstrukcióra. Vagyis például hogyan kezdenénk előállítani a 234-et?) Plusz pontért: Legrosszabb esetben n hány Fibonacci-szám összegeként áll elő?