10. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Bizonyítsd be, hogy $n > 1$ pontosan akkor prím, ha $\frac{\pi(n-1)}{n-1} < \frac{\pi(n)}{n}$.

2. Melyek konvergensek az alábbi sorok közül?

$$\text{(a)} \sum_p \frac{1}{p+2} \qquad \text{(b)} \sum_{p \neq q} \frac{1}{pq} \qquad \text{(c)} \sum_p \frac{1}{p^2}.$$

3. Bizonyítsd be, hogy $n!$ nem teljes hatvány, ha $n > 1$.

4. Igazold, hogy két szomszédos pozitív egész szám közül legalább az egyik felírható különböző prímek összegeként.

5. Hány darab 1-essel kezdődő prím van? Hány ezer darab 4-essel kezdődő prím van? Általánosítsd az eredményt.

Kitérő:

Sejtés. (Erdős Pál) Ha $0 < a_1 < a_2 < \dots$ egy szigorúan növő természetes számokból álló sorozat és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$, akkor az $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz tartalmaz tetszőlegesen hosszú véges számtani sorozatot.

A kérdést nemrég oldották meg abban a speciális esetben, amikor a_n az n. prím:

Tétel. (B. Green, T. Tao) *A prímek tartalmaznak tetszőlegesen hosszú véges számtani sorozatot.*

Legyen $\mathcal{W}$ a természetes számok azon részhalmazainak családja melyek nem tartalmaznak tetszőleges hosszú véges számtani sorozatot.

Tétel. (B.L. van der Waerden) *$\mathcal{W}$ zárt a véges unióra, vagyis ha $A, B \in \mathcal{W}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{W}$. Másképpen, ha $A \cup B$ tartalmaz tetszőleges hosszú számtani sorozatot, akkor A vagy B is ilyen.*

Legyen

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} < \infty \right\}.$$

Erdős sejtése tehát úgy is megfogalmazható, hogy $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

Adott $X \subseteq \mathbb{N}$ halmaz *alsó* és *felső sűrűsége*:

$$\underline{d}(X) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|X \cap \{0, \dots, n-1\}|}{n} \qquad \overline{d}(X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|X \cap \{0, \dots, n-1\}|}{n}.$$

Ha létezik $\lim_{n\to\infty} \frac{|X\cap\{0,\dots,n-1\}|}{n}$, vagyis $\underline{d}(X) = \overline{d}(X)$, akkor azt mondjuk, hogy ez a szám az X *sűrűsége*, $d(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{|X\cap\{0,\dots,n-1\}|}{n}$. Jelölje $\mathcal{Z}$ a nulla (felső) sűrűségű halmazok családját: $\mathcal{Z} = \{A \subseteq \mathbb{N} : d(A) = 0\}$.

Könnyen meggondolható, hogy $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ és $\mathcal{Z}$ is *leszálló* (vagyis ha A benne van, akkor A minden részhalmaza is), továbbá hogy zártak a véges unióra. Ennél több is igaz, lásd a házit.

6. Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \subsetneq \mathcal{Z}$.

Ezek után már jobban érthető a következő tétel fontossága (ugyanis tekinthető az Erdős-sejtés egy speciális esetének):

Tétel. (E. Szemerédi) *Ha $\overline{d}(X) > 0$, akkor X tartalmaz tetszőleges hosszú véges számtani sorozatot, vagyis $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$.*

1. HF. Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-re (mj. és $\mathcal{Z}$-re is) igaz a következő:

$$\forall \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \; \exists A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \; \forall n \in \mathbb{N} \; |A_n \setminus A| < \infty.$$

2. HF. Bizonyítsd be, hogy ha $n > 2$, akkor $2^n - 1$ és $2^n + 1$ nem lehetnek mindketten prímek.