11. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Legyen p_n az n. prím. Bizonyítsd be, hogy minden $n > 1$-re $p_n < 2^n$.

2. Bizonyítsd be, hogy ha $n, k > 0$ természetes számok, akkor az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+k}$$

nem lehet egész szám.

3. Bizonyítsd be, hogy $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$, vagyis hogy

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{p\leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0.$$

4. Bizonyítsd be, hogy minden k természetes számhoz létezik N, hogy minden $n \geq N$-re $[1, \ldots, n] > n^k$.

5. Mutasd meg a Prímszámtétel felhasználása nélkül, hogy létezik $c > 0$, amivel $\pi(x) < c\frac{x}{\log x}$. Ötlet: Gondold meg miért igaz és használd fel a

$$(\sqrt{n})^{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})} \leq \prod_{\sqrt{n}<p\leq n} p$$

egyenlőtlenséget.

6. Bizonyítsd be a Prímszámtétel felhasználásával, hogy $\sum_{p\leq n} \log p \sim n$. Ötlet: Gondold meg miért igaz és használd fel az

$$\log(a_n) \cdot \big(\pi(n) - \pi(a_n)\big) \leq \sum_{p\leq n} \log p \leq \log n \cdot \pi(n)$$

egyenlőtlenséget, ahol például lehet $a_n = \frac{n}{(\log n)^2}$.

1. HF. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_1 \cdots p_n}$ sor, ahol p_n az n. prím?

2. HF. Legyen p_n az n. prím és $d_n = p_{n+1} - p_n$. Bizonyítsd be, hogy létezik végtelen sok olyan n, amire $d_n < d_{n+1}$.

HF*. Bizonyítsd be a következő Ramsey-típusú tételt: Minden $c, \ell > 0$ természetes számokhoz létezik $W(c, \ell)$ természetes szám, hogy az $\{1, 2, \ldots, W(c, \ell)\}$ halmaz minden c részre particionálása esetén az egyik partíció tartalmaz ℓ hosszú számtani sorozatot.