12. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Jelölje $|_{\mathbb{Z}}$ és $|_{\mathbb{G}}$ az egyészek illetve a Gauss-egészek közötti oszthatóság relációt, hasonlóan $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{Z}}$ és $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{G}}$ a megfelelő legnagyobb közös osztót. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor

(a) $a \mid_{\mathbb{Z}} b \iff a \mid_{\mathbb{G}} b$,

(b) egység szorzótól eltekintve $(a,b)_{\mathbb{Z}} = (a,b)_{\mathbb{G}}$.

2. Legyen $a, b > 0$ relatív prím pár. Bizonyítsd be, hogy $ab - a - b$ nem áll elő $ax + by$, $x, y \geq 0$ alakban, de minden nála nagyobb szám igen.

3. Határozd meg az alabbi legnagyobb közös osztókat:

(a) $(11 - 3i, 8 + i)$,

(b) $(10 - 11i, 16 + 11i)$.

4. Bontsd fel Gauss-prímek szorzatára az alábbi Gauss-egészeket:

(a) $270 + 2610i$,

(b) $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13^2 i$.

5. $(39(1-i)^3, 62(2+i)^3) = ?$

1. HF. Melyik igaz, melyik hamis?

(a) $(N(\alpha), N(\beta)) = 1 \Rightarrow (\alpha, \beta) = 1$.

(b) $(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow (N(\alpha), N(\beta)) = 1$.

(c) $(\alpha, \beta) = (\bar{\alpha}, \beta) = 1 \Rightarrow (N(\alpha), N(\beta)) = 1$.

(d) Ha $\alpha = \beta^3$, akkor $N(\alpha)$ köbszám.

(e) Ha $\alpha \mid \bar{\alpha}$, akkor $N(\alpha)$ négyzetszám vagy egy négyzetszám kétszerese.

(f) Ha $N(\alpha)$ négyzetszám vagy egy négyzetszám kétszerese, akkor $\alpha \mid \bar{\alpha}$.

2. HF. Legyen $\alpha = a + bi \in \mathbb{G}$. Mi a kapcsolat $(\alpha, \bar{\alpha})$ és (a, b) között?