2. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Határozd memg az $(1521, 372)$ és a $(233, 377)$ legnagyobb közös osztókat és add meg az $1521x + 372y = (1521, 372)$ illetve $233x + 377y = (233, 377)$ diofantikus egyenletek egy-egy egész megoldását.

2. Bizonyítsd be, hogy adott a, b, c egészek esetén az $ax + by = c$ diofantikus egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha $(a, b) \mid c$.

3. Legyen $(a, b) = 5$. Mi lehet $(a + b, a - b)$ illetve $(a + 2b, 4a - b)$?

4. Milyen n-re prímszám

(a) $n^3 - n + 3$;

(b) $n^3 - 27$;

(c) $n^8 + n^7 + \cdots + n + 1$?

5. Mutasd meg, hogy $a > 1$ és $n, k > 0$ esetén $(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1$.

6.* Vizsgáljuk meg a következő algoritmust: Adott egy tetszőleges természetes szám, például 25. Írjuk fel 2-es számrendszerben:

$$25 = a_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

a_3-at úgy kapjuk, hogy megnöveljük az alapokat és kivonunk 1-et: $a_3 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 - 1$. "És így tovább": írjuk fel a_3-at 3-as számrendszerben:

$$a_3 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0,$$

a_4-et úgy kapjuk, hogy megnöveljük az alapokat és kivonunk 1-et: $a_4 = 1 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 - 1$. Irjuk fel a_4-et 4-es számrendszerben: $a_4 = 1 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$... Bizonyítsd be, hogy valamely n-re $a_n = 0$ lesz.

1. HF. Számold ki a $(132239, 11819)$ legnagyobb közös osztót és add meg a $132239x + 11819y = (132239, 11819)$ diofantikus egyenlet egy egész megoldását.

2. HF. Bizonyítsd be, hogy ha $n \neq k$ természetes számok és a páros, akkor $(a^{2^n} + 1, a^{2^k} + 1) = 1$.