3. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

Néhány megoldás

1. Adott $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ kanonikus alakú természetes szám az olyan $\ell = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} p_{r+1}^{\beta_{r+1}} \cdots p_t^{\beta_t}$ kanonikus alakú számoknak osztója, amikre $\alpha_i \leq \beta_i$ minden $i = 1, \dots, r$-re.

Ha $\ell = k^2$, akkor $\beta_j = 2\gamma_j$ alakúak a kitevők, vagyis $\alpha_i \leq 2\gamma_i$. Az a kérdes, hogy ebből mikor következik, hogy n osztja k-t, vagyis hogy $\alpha_i \leq \gamma_i$. Világos, hogy ez csak akkor biztos, ha $\alpha_i = 1$ minden $i = 1, \dots, r$-re. Az ilyen számokat nevezzük négyzetmentesnek.

2. A felbonthatatlanok a páratlan számok kétszeresei, mert pontosan ezek a számok nem bonthatók fel két páros szám szorzatára.

Prímek nincsenek, mert minden n páros szám esetén $n \mid_{2\mathbb{Z}} 2n$, de $n \nmid_{2\mathbb{Z}} 2$ még $n = \pm 2$ esetén sem, mert $\frac{2}{\pm 2} = \pm 1 \notin 2\mathbb{Z}$ és $n \nmid n$, mert $\frac{n}{n} = 1 \notin 2\mathbb{Z}$.

3. A Legendre Tétel szerint a keresett kitevő: $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2009}{11^k}\right] = \left[\frac{2009}{11}\right] + \left[\frac{2009}{11^2}\right] + \left[\frac{2009}{11^3}\right] + 0 + 0 + \cdots = 182 + 16 + 1 = 199$.

4. $9^{33} \equiv 2^{33} = (2^3)^{11} \equiv 1^{11} \equiv 1 \ (7)$.

$5^{23^{12}} \equiv (-2)^{23^{12}} = (-1)^{23^{12}} 2^{23^{12}} = -2^{23^{12}}$ (7) és tudjuk, hogy $2^3 \equiv 1$ (7), vagyis azt kéne kitalalni, hogy 23^{12} milyen maradékot ad 3-mal osztva. $23^{12} \equiv (-1)^{12} = 1 \ (3)$, amiből $-2^{23^{12}} = -2^{3k+1} = -2 \equiv 5 \ (7)$

5. Tegyük fel, hogy $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $p(n)$ prím minden $n \geq N \in \mathbb{Z}$ esetén. Belátjuk, hogy ekkor p egy konstans polinom. A $q(x) = p(x+N)$ polinom már 0-tól kezdve prímet vesz fel. Legyen $q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. $q(0) = a_0$ prím. Ha $a_0 > 0$, akkor minden $k > 0$-ra $q(ka_0) = a_n (ka_0)^n + a_{n-1}(ka_0)^{n-1} + \cdots + a_1(ka_0) + a_0$ egy a_0-lal osztható prím, vagyis $q(ka_0) = \pm a_0$. Tehát a q polinom végtelen sok helyen veszi fel ugyanazt az értéket (a_0-t vagy $-a_0$-t), ezért konstans, vagyis p is konstans.

Ha $a_0 < 0$, akkor a $-ka_0$ helyettesítéssel hasonlóan okoskodhatunk.

6. $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})$ és tudjuk, hogy $m \mid a - b$. Azt kell belátnunk, hogy a másik tényezőt is osztható m-mel. Mivel $a \equiv b \ (m)$, ezért $a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1} \equiv a^{m-1} + a^{m-2}a + \cdots + aa^{m-2} + a^{m-1} = ma^{m-1} \equiv 0 \ (m)$.