3. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Karakterizáld egy n természetes szám következő tulajdonságát:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\; n \mid k^2 \Rightarrow n \mid k.$$

2. A páros számok $2\mathbb{Z}$ halmazában kik a felbonthatatlanok és kik a prímek?

3. Mi a 11 kitevője 2009! kanonikus alakjában?

4. Mi a maradéka 9^{33}-nek illetve $5^{23^{12}}$-nek 7-tel osztva?

5. Legyen $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egy egészegyütthatós nem konstans polinom. Bizonyítsd be, hogy egész számokat helyettesítve $p(n)$ nem lehet prím még valahonnantól kezdve sem (vagyis minden $n \geq N$-re valamely N egész esetén).

6. Bizonyítsd be, hogy ha $a \equiv b \ (m)$, akkor $a^m \equiv b^m \ (m^2)$.

7. Bizonyítsd be, hogy ha $m = p$ prím vagy $m = 2p$ ahol p páratlan prím, akkor $a^2 \equiv b^2 \ (m)$ esetén $a \equiv b \ (m)$ vagy $a \equiv -b \ (m)$. Más m-ekre mutass ellenpéldát.

1. HF. Az $5^{7^{9^{11}}}$ számjegyeinek összegének számjegyeinek az összege osztható-e 6-tal?

2. HF. Mik a legkisebb pozitív egészek melyeknek pontosan 11, 12, illetve 27 pozitív osztója van?