

4. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Van-e olyan m , hogy 3, 36, és 64 ugyanannak mod m maradékosztálynak az elemei?
2. Melyik állítás igaz az alábbiak közül?
 - (a) Ha r_1, \dots, r_k redukált maradékrendszer mod 7, akkor mod 14 is az.
 - (b) Ha r_1, \dots, r_k redukált maradékrendszer mod 14, akkor mod 7 is az.
3. Mennyi $\varphi(82)$, $\varphi(1000)$, illetve $\varphi(2009)$?
4. Igazold, hogy minden $n \geq 1$ esetén $\varphi(n) + d(n) \leq n + 1$. Mikor áll fenn egyenlőség?
5. Bizonyítsd be, hogy minden $n \geq 1$ esetén $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
- 6.* Bizonyítsd be a szita formula segítségével, hogy minden $n \geq 1$ esetén $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - p^{-1})$.
7. Mutasd meg, hogy ha $11 \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$, akkor $11^{30} \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ is teljesül.
8. Bizonyítsd be, hogy minden $a, b \in \mathbb{N}$ esetén $23 \nmid a^{88} - b^{88}$ pontosan akkor teljesül, ha a és b közül pontosan az egyik osztható 23-mal.
1. **HF.** Legyen r_1, \dots, r_k (a) teljes, (b) redukált maradékrendszer mod m . Milyen maradékot ad m -mel osztva $\sum_{j=1}^k r_j$?
2. **HF.** Igazold, hogy létezik végtelen sok olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre 133^n utolsó három számjegye 133.