5. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Oldd meg az alábbi lineáris kongruenciákat illetve diofantikus egyenleteket:

(a) $23x \equiv 11 \ (5)$;

(b) $36x \equiv 81 \ (21)$;

(c) $80x \equiv 32 \ (108)$;

(d) $40x \equiv 6 \ (12)$;

(e) $555x \equiv 5555 \ (55555)$;

(f) $15x + 13y = 19$;

(g) $18x + 28y = 10$.

2. Legyen a és m rögzített pozitív természetes számok és jelölje $f(b)$ az $ax \equiv b$ (m) kongruencia páronként inkongruens megoldásainak számát. Határozd meg a $\sum_{b=1}^{m} f(b)$ összeget.

3. Old meg az alábbi szimultán kongruenciarendszereket illetve arra visszavezethető magasabbfokú kongruenciákat:

(a) $x \equiv 3 \ (7)$, $x \equiv 2 \ (13)$;

(b) $x \equiv 3 \ (8)$, $x \equiv 5 \ (6)$;

(c) $4x \equiv 2 \ (6)$, $12x \equiv 3 \ (21)$;

(d) $2x^{20} + 3x + 4 \equiv 0 \ (176)$.

4. Van-e olyan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egész együtthatós polinom, melyre az $f(x) \equiv 0$ (30) kongruenciának 14 megoldása van mod 30?

5. Legyen $p = 4k - 1$ prím. Bizonyítsd be, hogy $\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1 \ (p)$.

6. Milyen maradékot ad $(m-1)!$ m-mel osztva?

7.* Bizonyítsd be, hogy tetszőleges nemtriviális számtani sorozatban van tetszőlegesen sok (véges) egymást követő összetett szám.

1. HF. Oldd meg a $21x^{66} + 16x^{30} + 11x + 6 \equiv 0 \ (333)$ kongruenciát.

2. HF. Egy szám utolsó jegye 20-as számrendszerben 11. Mi lehet a szám utolsó jegye 8-as számrendszerben?