9. Számelmélet gyakorlat (2009/2010)

1. Legyen $a_1, \ldots, a_n$ egy prímekből álló számtani sorozat. Bizonyítsd be, hogy minden n-nél kisebb pozitív prím osztja a differenciát.

2. Bizonyítsd be, hogy a Pepin-teszt igaz 3 helyett 5-tel vagy 10-el is, vagyis például: F_n $(n \geq 1)$ pontosan akkor prím, ha

$$5^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 \quad (F_n).$$

3. Hány 4321-re végződő prímszám van? Általánosítsd az eredményt.

4. Bizonyítsd be, hogy minden $c > 0$-hoz létezik p prím, hogy c kvadratikus maradék mod p. (Ötlet: Keressük p-t $8ck + 1$ alakban.)

5. Bizonyítsd be, hogy <u>ha</u> minden $a, d > 0$ relatív prím párhoz létezik $a + kd$ alakú prím $(k \geq 0)$, <u>akkor</u> minden $a, d > 0$ relatív prím párhoz létezik végtelen sok $a + kd$ alakú prím $(k \geq 0)$.

1. HF. Bizonyítsd be, hogy $\varphi(N)$ pontosan akkor kettőhatvány, ha $N = 2^\alpha p_1 \ldots p_r$ alakú, ahol a p_i-k különböző Fermat-prímek.

2. HF. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok $12k + 11$ alakú prím van.