Matematika A1

13. feladatsor

1. Határozza meg az alábbi görbék alatti területet:
   (a) $x(t) = 3cht, \quad y(t) = 2sht, \quad 2 \le t \le 3$
   (b) $x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
   (c) $x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \pi$
2. Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:
   (a) $y = chx, \quad 0 \le x \le 3$
   (b) $y = x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$
   (c) $y = x^2, 0 \le x \le 1$
   (d) $y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \le x \le 4$
   (e) $x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
   (f) $x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
3. Határozza meg az alábbi görbék x-tengely körüli forgatásával nyert felület felszínét:
   (a) $y = 2\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$
   (b) $y = chx, \quad 0 \le x \le 3$
   (c) $y = 3x^3, \quad 0 \le x \le 1$
   (d) $x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
4. Határozza meg az $y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \le x \le r$ alatti negyedkörlemez súlypontját!
5. Határozza meg az $y = ax$ egyenes x tengely körüli forgatásával nyert m magasságú kúp térfogatát!
6. Határozza meg az alábbi görbék x-tengely körüli forgatásából származó térfogatot:
   (a) $y = chx, \quad 0 \le x \le 3$
   (b) $y = \ln x, \quad 2 \le x \le 6$
   (c) $x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
7. Számoljuk ki az improprius integrálokat!
   (a) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$
   (b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}}dx$
   (c) $\int\limits_2^\infty \frac{2}{x^2-x}dx$
   (d) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$

(e) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg} x)} dx$

(f) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(g) $\int\limits_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

8. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott integrálok konvergensek-e! Használjuk a definiciót, az összehasonlító kritériumokat vagy a hányadostesztet!

(a) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$

(b) $\int\limits_0^{\ln 2} x^{-2} e^{-1/x} dx$

(c) $\int\limits_{-1}^1 \ln |x| dx$

(d) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

(e) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6+1}} dx$

(f) $\int\limits_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x} dx$

(g) $\int\limits_4^\infty \frac{2}{x^{3/2}-1} dx$

(h) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$

9. Mutassuk meg, hogy

$$\int\limits_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$$

divergens, így az

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$$

integrál is divergens! Lássuk be, hogy ezzel szemben

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_{-b}^b \frac{2xdx}{x^2+1} = 0!$$

10. Vegyük azt a forgástestet, amely az $y = 1/x$, $1 \leq x$ görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkezik. A forgástest *felszínét* az

$$\int\limits_1^\infty 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1+\frac{1}{x^4}} dx$$

integrállal számolhatjuk ki. Tudjuk, hogy az $\int_1^\infty (dx/x)$ divergens, így tetszleges b-re

$$\int_1^b 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx > 2\pi \int_1^b \frac{1}{x}dx,$$

amiből az következik, hogy a forgástest felszínét leíró integrál *divergens*. Viszont a test *térfogatát* leíró

$$\int_1^\infty \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

integrál konvergens.

(a) Számoljuk ki az utóbbi integrál értékét!

(b) Ezt a forgástestet sokszor úgy emlegetik, mint egy olyan festékesbödönt, amibe nem fér bele annyi festék, amennyivel be lehetne festeni a belsejét. Töprengjünk el ezen! Az biztos, hogy véges mennyiségű festékkel nem tudjuk befesteni a végtelen területű felszínt. De ha csurig töltjük a bödönt - amihez véges mennyiségű festék is elég - a festék megfesti a felszínt belülről! Oldjuk fel ezt az ellentmondást!