

# Matematika A1

## 5. gyakorlat

### Folytonosság

1. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -1 \leq x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ -2x + 4 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 3 \end{cases}$$

függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg határérték, jobb illetve bal oldali határérték, valamint folytonosság, jobb, illetve bal oldali folytonosság szempontjából az  $x = -1, 0, 1, 2$  és  $3$  helyeket. Van-e az  $f(x)$  függvénynek megszüntethető szakadása?

2. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ -x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg határérték, jobb illetve bal oldali határérték, valamint folytonosság, jobb, illetve bal oldali folytonosság szempontjából az  $x = -1, 0, 1, 2$  és  $3$  helyeket. Van-e az  $f(x)$  függvénynek megszüntethető szakadása?

3. Mely pontokban folytonosak az alább megadott függvények?

(a)  $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

(b)  $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$

(c)  $y = \frac{\cos x}{x}$

(d)  $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$

(e)  $y = \sqrt{2x+3}$

4. Igazoljuk, hogy a függvénynek a megadott helyen létezik folytonos kiterjesztése.

(a)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, \quad x = -1$

(b)  $g(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-6}, \quad x = 3$

5. Adjuk meg az  $a$  értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 3 \\ 2ax & x \geq 3 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos legyen.

6. Ki lehet-e terjeszteni az  $f(x) = x(x^2 - 1)/|x^2 - 1|$  függvényt úgy, hogy az  $x = -1$  vagy az  $x = 1$  helyen folytonossá váljon? Indokoljuk válaszunkat. (A függvény grafikonja meglehetősen érdekes, érdemes ábrázolni.)

7. Határozza meg az alábbi határértékeket:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{7x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x}$

8. **Dirichlet függvény** Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az  $f$  függvény sehol sem folytonos.

9. Határozza meg az alábbi függvények deriváltjait:

(a)  $f(x) = x^2 + 4x + 5 + \frac{1}{x}$

(b)  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4x+3}{x^7} + \sin x$

(c)  $f(x) = e^x + \ln x + 10^x + \log_2 x$