

Matematika A1

9. feladatsor

Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal: Tegyük fel, hogy $f(x)$ az a és b között $(n+1)$ -szer differenciálható és $f^{(n)}(x)$ a zárt számközben folytonos. Ekkor létezik egy c az a és b között, amelyre

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ha

$$T_{f,n}(a) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

akkor

$$f(b) = T_{f,n}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ennek egyszerű következménye:

$$|f(b) - T_{f,n}(a)| \leq \max_x \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \right|,$$

ahol a maximumot az a és b közötti x -ek esetén vesszük.

1. Határozza meg az n -edrendű Taylor-polinomot:

(a) $f(x) = \cos x$, $a = \pi$, $n = 4$ Megoldás: $-1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4$,

(b) $f(x) = \sin 3x$, $a = 0$, $n = 5$ Megoldás: $3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 1$, $n = 3$ Megoldás: $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3$

(d) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n \in \mathbb{N}$ Megoldás: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

(e) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 6$, $a = 0$, $n = 4$ Megoldás: $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 6$

2. Írja fel az $f(x) = \sin x$ függvény 5-ödrendű $a = 0$ -ban vett Taylor-polinomját és adjon becslést arra, hogy a $\sin 0,1$ és $T_{f,5}(0,1)$ között mekkora eltérés lehet. Megoldás: $T_{f,5}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $\max_{0 < \xi < 0,1} \frac{|\sin(\xi)|}{6!} 0,1^6 \leq \frac{1}{6!} 0,1^6$

3. Írja fel az $f(x) = \cos x$ függvény 4-edrendű $a = 0$ -ban vett Taylor-polinomját és adjon becslést arra, hogy a $\cos 0,2$ és $T_{f,4}(0,2)$ között mekkora eltérés lehet. Megoldás: $T_{f,4} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $\max_{0 < \xi < 0,2} \frac{|\sin \xi|}{5!} 0,2^5 \leq \frac{0,2^5}{5!}$

4. Írja fel az $f(x) = e^x$ függvény 3-adrendű $a = 0$ -ban vett Taylor-polinomját és adjon becslést arra, hogy a e^{-1} és $T_{f,3}(-1)$ között mekkora eltérés lehet. Megoldás: $T_{f,3} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $\max_{-1 < \xi < 0} \frac{e^\xi}{4!} | -1|^4 \leq \frac{1}{24}$

5. Az $f(x) = e^x$ alkalmas $a = 0$ -ban vett Taylor polinomja segítségével határozza meg 10^{-5} pontossággal e -t! Megoldás: $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!}$

6. Az $f(x) = \sqrt{x}$ alkalmas $a = 1$ -ben vett Taylor polinomja segítségével határozza meg 10^{-4} pontossággal $\sqrt{0,9}$ -et! Megoldás: $1 - \frac{0,1}{2} - \frac{0,1^2}{8}$

7. Az $f(x) = \ln x$ alkalmas $a = 1$ -ben vett Taylor polinomja segítségével határozza meg 10^{-3} pontossággal $\ln 1,1$ -et! Megoldás: $0,1 - \frac{0,1^2}{2}$