Matematika A1

3. és 4. gyakorlat

Számsorozatok

1. Határoza meg az alábbi sorozatok határértékét és határozzon meg egy N küszöbindexet az adott ε hibakorláthoz!

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3}$, $\varepsilon = 0,01$ megoldás: $N = 74$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+6n}{3n^2+5}$, $\varepsilon = 0,001$ megoldás: $N = 2000$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{3n-5}$, $\varepsilon = 0,01$ megoldás: $N = 1223$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+5}{2n^3}$, $\varepsilon = 10^{-5}$ megoldás: $N = 64$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}+2}$, $\varepsilon = 10^{-4}$ megoldás: $N = 8$

2. Az alább megadott sorozatok közül állapítsuk meg, hogy melyek konvergensek, és melyek divergensek. A konvergens sorozatok esetében határozzuk meg a sorozat határértékét is!

   (a) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$ megoldás: -1

   (b) $a_n = \frac{n^2-3n}{n^2+6n-5}$ megoldás: 1

   (c) $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ megoldás: $\frac{1}{2}$

   (d) $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$ megoldás: -5

   (e) $a_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$ megoldás: divergens

   (f) $a_n = 1 + (-1)^n$ megoldás: divergens

   (g) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}$ megoldás: 0

   (h) $a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$ megoldás: 0

   (i) $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ megoldás: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

   (j) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$ megoldás: 1

   (k) $a_n = 8^{1/n}$ megoldás: 1

   (l) $a_n = \sqrt[n]{10n}$ megoldás: 1

   (m) $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$ megoldás: 4

   (n) $a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n}$ megoldás: divergens

   (o) $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ megoldás: 1

   (p) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ megoldás: e^{-1}

   (q) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ megoldás: 1

(r) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+5}$ megoldás: $e^{1/2}$

(s) $a_n = \left(1+\frac{5}{3n+7}\right)^{6n}$ megoldás: e^{10}

(t) $a_n = \left(1+\frac{4\sqrt{n}}{n+9}\right)^{5\sqrt{n}}$ megoldás: e^{20}

(u) $a_n = \left(1+\frac{3}{2^n+5}\right)^{2^n-4}$ megoldás: e^{3}

(v) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$ megoldás: 1

(w) $a_n = n-\sqrt{n^2-n}$ megoldás: $\frac{1}{2}$

(x) $a_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$ megoldás: 1

(y) $a_n = \frac{2^n+3^n}{n+4^n}$ megoldás: 0

(z) $a_n = \frac{5^n+6^n}{4^n+6^{n+1}}$ megoldás: $\frac{1}{6}$

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorozatok monotonak-e, illetve korlátosak-e.

(a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$, megoldás: monoton nő, korlátos

(b) $a_n \frac{n^2+5n}{n^2+1}$, megoldás: monoton csökken, korlátos

(c) $a_n = n^+(-1)^n n^2$, megoldás: nem monoton, nem korlátos

(d) $a_n = \frac{2^n \cdot 3^n}{n!}$ megoldás: monoton csökken $n \geq 5$, korlátos

(e) $a_n = \frac{2^n+1}{n!}$, megoldás: monoton csökken, korlátos

(f) $a_n = 2-\frac{2}{n}-\frac{1}{2^n}$ megoldás: monoto nő, korlátos

4. Határozzuk meg a megadott sorozatok torlódási pontjainak halmazát.

(a) $a_n = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{2n^2-3}{n^2+n+8}$, megoldás: $-2, 0, 2$

(b) $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ megoldás: $-1, 1$

(c) $a_n = \sqrt{\frac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+8}}$ megoldás: $0, \sqrt{\frac{2}{3}}$