Matematika A1

9. feladatsor

Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal: Tegyük fel, hogy $f(x)$ az a és b között $(n+1)$-szer differenciálható és $f^{(n)}(x)$ a zárt számközben folytonos. Ekkor létezik egy c az a és b között, amelyre

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ha

$$T_{f,n}(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

akkor

$$f(b) = T_{f,n}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ennek egyszerű következménye:

$$|f(b) - T_{f,n}(b)| \leq \max_x \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \right|,$$

ahol a maximumot az a és b közötti x-ek esetén vesszük.

1. Határozza meg az n-edrendű Taylor-polinomot:
   (a) $f(x) = \cos x$, $a = \pi$, $n = 4$ Megoldás: $-1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4$,
   (b) $f(x) = \sin 3x$, $a = 0$, $n = 5$ Megoldás: $3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!}$
   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 1$, $n = 3$ Megoldás: $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3$
   (d) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n \in \mathbb{N}$ Megoldás: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
   (e) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 6$, $a = 0$, $n = 4$ Megoldás: $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 6$

2. Irja fel az $f(x) = \sin x$ függvény 5-ödrendű $a = 0$-ban vett Taylor-polinomját és adjon becslést arra, hogy a $\sin 0,1$ és $T_{f,5}(0,1)$ között mekkora eltérés lehet. Megoldás: $T_{f,5}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $\max_{0<\xi<0,1} \frac{|\sin(\xi)|}{6!}0,1^6 \leq \frac{1}{6!}0,1^6$

3. Irja fel az $f(x) = chx$ függvény 4-edrendű $a = 0$-ban vett Taylor-polinomját és adjon becslést arra, hogy a $ch0,2$ és $T_{f,4}(0,2)$ között mekkora eltérés lehet. Megoldás: $T_{f,4} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $\max_{0<\xi<0,2} \frac{|sh\xi|}{5!}0,2^5 \leq \frac{sh0,2}{5!}0,2^5$

4. Irja fel az $f(x) = e^x$ függvény 3-adrendű $a = 0$-ban vett Taylor-polinomját és adjon becslést arra, hogy a e^{-1} és $T_{f,3}(-1)$ között mekkora eltérés lehet. Megoldás: $T_{f,3} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $\max_{-1<\xi<0} \frac{e^\xi}{4!}|-1|^4 \leq \frac{1}{24}$

5. Az $f(x) = e^x$ alkalmas $a = 0$-ban vett Taylor polinomja segítségével határozza meg 10^{-5} pontossággal e-t! Megoldás: $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!}$

6. Az $f(x) = \sqrt{x}$ alkalmas $a = 1$-ban vett Taylor polinomja segítségével határozza meg 10^{-4} pontossággal $\sqrt{0,9}$-et! Megoldás: $1 - \frac{0,1}{2} - \frac{0,1^2}{8}$

7. Az $f(x) = lnx$ alkalmas $a = 1$-ban vett Taylor polinomja segítségével határozza meg 10^{-3} pontossággal $\ln 1,1$-et! Megoldás: $0,1 - \frac{0,1^2}{2}$