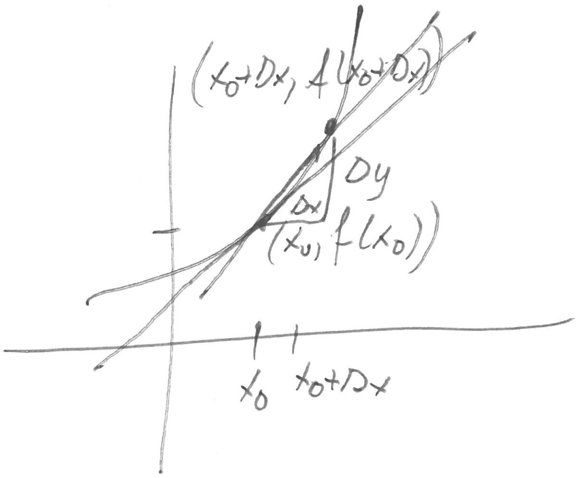
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Feladat: Határozzuk meg az $f(x)$ fv $(x_0, f(x_0))$-ban vett érintőjét!



Mi lesz az érintő meredeksége? A meredekség jól közelíthető, ha az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ pontokon át húzott egyenes meredekségével számolunk,

Ennek meredeksége: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Az érintő meredeksége: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Def Ha az $f(x)$ fvnek az x_0-ban létezik a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

határértéke, akkor az $f(x)$ fvt az x_0-ban differenciálhatónak vagy deriválhatónak mondjuk.

Jelölés: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$

Pl. $f(x)=x^2$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x_0+\Delta x=2x_0$$

Def Ha az $f(x)$ fv az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható, akkor az $f(x)$ egy differenciálható fv.

Pl. $f(x)=|x|$.

Ha $x_0>0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x|-|x_0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Ha $x_0<0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x|-|x_0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x_0+\Delta x)-(-x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

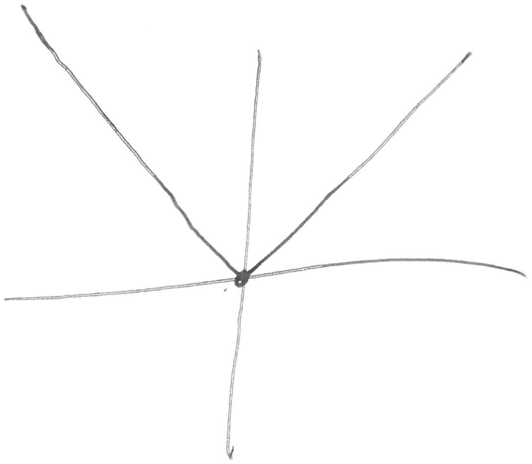
Ha $x_0=0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$\Rightarrow$ nem létezik határérték

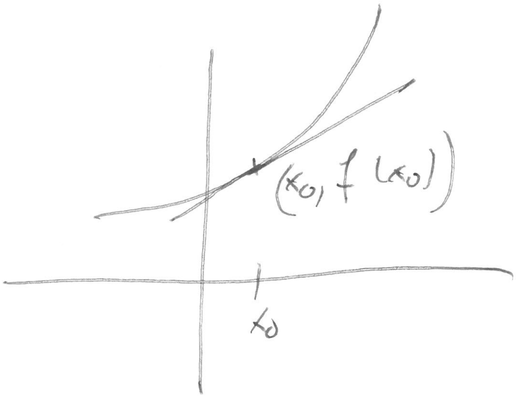
Megj: Az $f(x)$ az x_0-ban deriválható azt jelenti, hogy az $f(x)$ fv grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$-ban húzható érintő:



$f(x) = |x|$

$x_0 = 0$-ban nincs érintő

Érintő egyenes egyenlete:



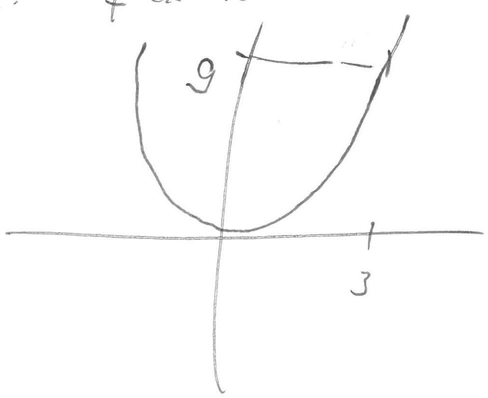
$m = f'(x_0)$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$

Pl. $f(x = x^2$



$(3, 9)$-ben érintő $x_0 = 3$, $f(3) = 9$

$f'(x_0) = 2x_0$

$f'(3) = 6$

$y = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$

Tétel Ha $f(x)$ diffható az $x = x_0$ helyen, akkor folytonos is ott.

Biz Ha $x \approx x_0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0)$

$\Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \approx f(x_0)$.

Nevezetes fvek deriváltjai

	$f(x)$	$f'(x)$
1.	x^{μ}	$\mu x^{\mu-1}$
2.	a^x	$a^x \ln a$
3.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
4.	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
5.	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
6.	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
7.	$\mathrm{cth}\, x$	$\frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$

	$f(x)$	$f'(x)$
8.	$\mathrm{arsh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
9.	$\mathrm{arch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
10.	$\mathrm{arth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$ $\lvert x\rvert<1$
11.	$\mathrm{arcth}\, x$	$-\frac{1}{x^2-1}$ $\lvert x\rvert>1$
12.	$\sin x$	$\cos x$
13.	$\cos x$	$-\sin x$

	$f(x)$	$f'(x)$
14.	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
15.	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
16.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18.	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
19.	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

1. $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu-1}$$

Volt: $\lim_{z \to 0} \frac{(1+z)^{\mu}-1}{z} = \mu$, $z = \frac{\Delta x}{x}$

2. $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$

Volt: $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$, $z=\Delta x\cdot\ln a$

$\lim_{\Delta x\to 0}a^x\cdot\ln a\cdot\frac{e^{\ln a\cdot\Delta x}-1}{\ln a\cdot\Delta x}=a^x\cdot\ln a$

3. $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{x}$

Volt: $\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1$

Műveletek függvényekkel és diffhatóság

$(cf)(x)\overset{def}{=}c\cdot f(x)$

1, Tfh $f(x)$ diffható x-ben $\Rightarrow$ $c\in\mathbb{R}$ esetén $cf(x)$ is az

$((cf)(x))'$ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(cf)(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x}=cf'(x).$

2, $(f+g)(x)\overset{def}{=}f(x)+g(x)$

Tfh f és g is diffható x-be. Ekkor

$((f+g)(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-(f(x)+g(x))}{\Delta x}$

$=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$

3. Hasonlóan: $(f-g)(x)\overset{def}{=}f(x)-g(x)$ esetén $((f-g)(x))'=f'(x)-g'(x)$.

4. $(f\cdot g)(x)\overset{def}{=}f(x)g(x)$

Tfh $f(x)$ és $g(x)$ is diffható x-be. Ekkor

$$((f\cdot g)(x))' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+\Delta x) - (f\cdot g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \underset{\overset{\downarrow}{g(x)}}{g(x+\Delta x)} \underset{\overset{\downarrow}{f'(x)}}{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} + f(x) \underset{\overset{\downarrow}{g'(x)}}{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}} =$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \overset{def}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$ lu $g(x) \neq 0$.

$$\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+\Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - (f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underset{\overset{\downarrow}{\frac{1}{g^2(x)}}}{\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}} \left(g(x) \underset{\overset{\downarrow}{f'(x)}}{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} - f(x) \underset{\overset{\downarrow}{g'(x)}}{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}\right) =$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

4. $(\text{sh}\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x)' - (e^{-x})' = \frac{1}{2}e^x - (-e^{-x}) =$

$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$

$(e^{-x})' = ((e^{-1})^x)' = (e^{-1})^x \ln e^{-1} = -e^{-x}$

$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{ch}\,x$

5. Hasonlóan $(\text{ch}\,x)' = \text{sh}\,x$

6. $(\text{th}\,x)' = \left(\frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}\right)' = \frac{(\text{sh}\,x)'\,\text{ch}\,x - \text{sh}\,x\,(\text{ch}\,x)'}{\text{ch}^2 x} = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

7. Hasonlóan : $(\text{cth}\,x)' = \frac{-1}{\text{sh}^2 x}$.

Láncszabály: Tfh f fv diffható g(x)-ben és g(x) diffható.

Ekkor

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$, akkor $\Delta g \to 0$ ha $\Delta x \to 0$.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ f'(g(x))}}{\frac{f(g(x)+\Delta g) - f(g(x))}{\Delta g}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g'(x)}}{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}} =$$

$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Alkalmazás : $x = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow 1 = x' = (f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'$

$\Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

8. $f(x) = \mathrm{sh}\,x$, $f^{-1}(x) = \mathrm{arsh}\,x$ $\quad f'(x) = \mathrm{ch}\,x$

$$(f^{-1}(x))' = (\mathrm{arsh}\,x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(\mathrm{arsh}\,x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{arsh}\,x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \Rightarrow \mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x$$

$$\mathrm{ch}\,x = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}$$

9. Hasonlóan: $(\mathrm{arch}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

10. $(\mathrm{arth}\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $\quad |x| < 1$

11. $(\mathrm{arcth}\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $\quad |x| > 1$

12. $$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \alpha = x+\Delta x, \quad \beta = x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

Volt: $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

13. $$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \alpha = x+\Delta x, \quad \beta = x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

14. $$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

15. Hasonlóan: $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

16. $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$$(f^{-1}(x))' = (\arcsin x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

17. Hasonlóan: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18. $f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}\,x \Rightarrow f(x) = \mathrm{tg}\,x$

$$(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}} = \cos^2(\mathrm{arctg}\,x) =$$

$$\frac{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}{\sin^2(\mathrm{arctg}\,x) + \cos^2(\mathrm{arctg}\,x)} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\mathrm{arctg}\,x)}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)} + \frac{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,x) + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

19. Hasonlóan: $(\mathrm{arcctg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Logaritmikus deriválás

$y = f(x)^{g(x)}$ deriváltja: $\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x) \quad /()'$

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y' = y(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Pl. $y=(\ln x)^x$

$\ln y = \ln(\ln x)^x = x\ln\ln x \quad /()'$

$\frac{y'}{y} = \ln\ln x + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \ln\ln x + \frac{1}{\ln x}$

$y' = y\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = (\ln x)^x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)$

Középértéki tételek

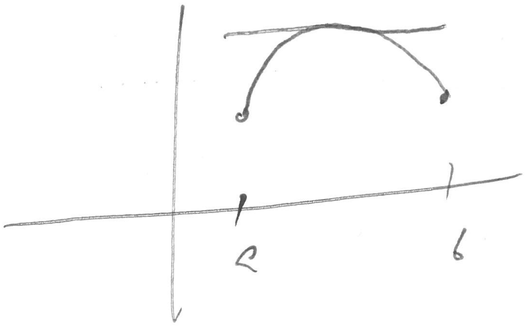
Rolle-tétel Legyen $f(x)$ fv

1, folyt $[a,b]$-ben

2, diffható $]a,b[$-ben

3, $f(a)=f(b)$.

Ekkor $\exists c\in\,]a,b[$, hogy $f'(c)=0$

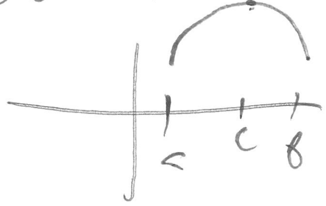


Azaz $\exists c\in\,]a,b[$, hogy ott vízszintes az érintő.

Biz Tudjuk, hogy zárt intervallumon folytonos fvnek van legnagyobb & legkisebb értéke ott: M és m.

Lehetőségek: 1, $M=m \Rightarrow f(x)$ konstans $\Rightarrow f'(c)=0 \quad \forall c\in\,]a,b[$

2, $M>m \Rightarrow \exists c\in\,]a,b[$, hogy $f(x)$-nek c-ben minimuma vagy maximuma van.



Tfh c-ben max van (a min hasonlóan intézhető el)

Ha $\Delta x < 0 \Rightarrow \frac{\overset{\le 0}{f(c+\Delta x)-f(c)}}{\underset{<0}{\Delta x}} \geq 0 \Rightarrow f'(c)=\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$

Ha $\Delta x > 0 \Rightarrow \frac{\overset{\le 0}{f(c+\Delta x)-f(c)}}{\underset{>0}{\Delta x}} \leq 0 \Rightarrow f'(c)=\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0$

$\Rightarrow f'(c)=0$. ■

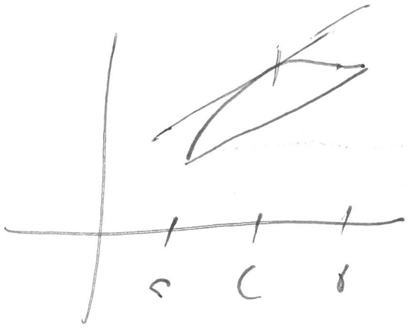
Ennek általánosítása:

Lagrange-tétel: Tfh az $f(x)$-re teljesül, hogy:

1, folyt $[a,b]$-ben

2, deriválható $]a,b[$-ben

$\Rightarrow \exists c \in]a,b[$, hogy $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$\exists c \in]a,b[$, hogy c-ben az érintő párhuzamos a szelővel.

Megj: Ha $f(b)=f(a)$, akkor a Rolle-tételt kapjuk.

Biz: Legyen $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ Ekkor

1, $g(x)$ folyt $[a,b]$-ben

2, $g(x)$ deriválható $]a,b[$-ben

3, $g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)-(f(b)-f(a))=f(a)$

$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)$

Így $g(x)$-re alkalmazható a Rolle-tétel:

$\exists c \in]a,b[$, hogy $g'(c)=0$

$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

A Lagrange-tétel általánosítása a Cauchy-féle középérték-tétel.

<u>Cauchy-féle középérték tétel</u> Tfh az $f(x)$ és $g(x)$ fvekre teljesül:

1., folytonosak $[a,b]$-ben

2, diffhatók $]a,b[$-ben

3., $g'(x) \neq 0 \quad x \in]a,b[$

4., $g(b) \neq g(a)$

$\Rightarrow \exists c \in]a,b[$, hogy $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>Megj</u>: Spec eset: $g(x) = x$ adja a Lagrange-tételt.

<u>Biz</u> Legyen $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$.

Ekkor 1, $h(x)$ folyt $[a,b]$-ben

2, $h(x)$ deriválható $]a,b[$-ben

3, $h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(a)-g(a)) = f(a)$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(b)-g(a)\right) = f(b) - (f(b)-f(a)) = f(a),$$

ezért $h(x)$-re alkalmazható a Rolle-tétel:

$$\exists\, c \in\,]a,b[\ :\quad 0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c) \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ . \ \blacksquare$$

L'Hospital-szabály

A $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ határértékek kiszámításánál az $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ -re vezető alakok a problémásak.

L'Hospital-szabály első alakja: Tfh $f(x)$ és $g(x)$ folyt $x=a$-ban. Ha $f'(a)$ és $g'(a)$ létezik és $g'(a)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Biz $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Pl. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x},\ (x-1)' = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2\cdot\cos 0}{3} = \frac{2}{3},\ (\sin 2x)' = 2\cdot\cos 2x,\ (3x)' = 3$

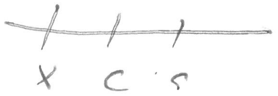
L' Hospital-szabály erősebb alakja: legyen $f(a)=0$, $g(a)=0$, valamint $f(x)$ és $g(x)$ egyaránt diffható valamely a-t tartalmazó I nyílt intervallumban kivéve esetleg a-t, továbbá $g'(x)\neq 0$ $x\in I$, ha $x\neq 0$. Ekkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték létezik.

Biz: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-f(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ a Cauchy-féle középértéktétel szerint valamely a és x közti c-vel.

Ha $x\to a$, akkor $c\to a$



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L' Hospital szabály alkalmazásai:

A $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ „$\dfrac{0}{0}$ v. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$" határértéket úgy kaphatjuk meg, hogy $f(x)$-et és $g(x)$-et újra és újra deriváljuk amíg nem $\dfrac{0}{0}$ v. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ határértéket kapunk. Ez a lehet $+\infty$ v. $-\infty$ is.

Pl. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x+3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1.$

$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} -x = 0$

Függvényvizsgálat

Cél: Az $f(x)$ fv alakhelyes grafikonjának elkészítése.

Def Ha az $f(x)$ fv deriváltja $f'(x)$ újra deriválható, akkor azt az $f(x)$ fv 2. deriváltjának hívjuk: $f''(x) = (f'(x))'$.

Harmadik derivált: $f'''(x) = (f''(x))'$

Negyedik derivált: $f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$

Pl. $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$.

Monotonitás

Def Az $f(x)$ fv monoton nő (csökken) az I intervallumon, ha $x_1 < x_2$ $x_1 x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Tétel Ha $f(x)$ deriválható az I intervallumon és $f'(x) \geq 0$ $(f(x) \leq 0)$, akkor monoton nő (csökken) ott.

Biz Lagrange-féle középértéktétel: $\exists x: \ x_1 < x < x_2$, hogy

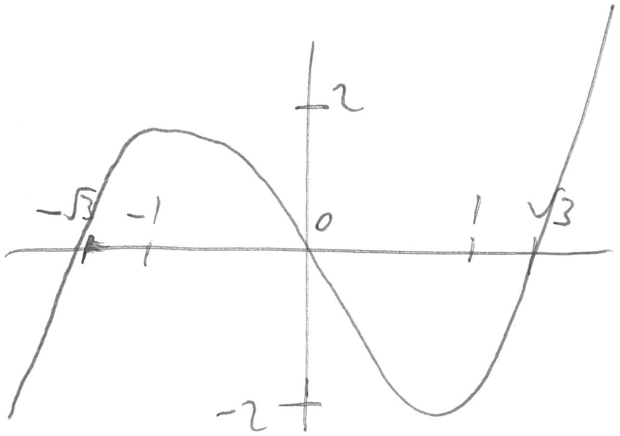
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) = f'(x)(x_2-x_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

Pl. Hol monoton nő ill. csökken az $f(x) = x^3 - 3x$ fv?

Megoldás: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = +1$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	mon. nő		mon. csökken		mon. nő



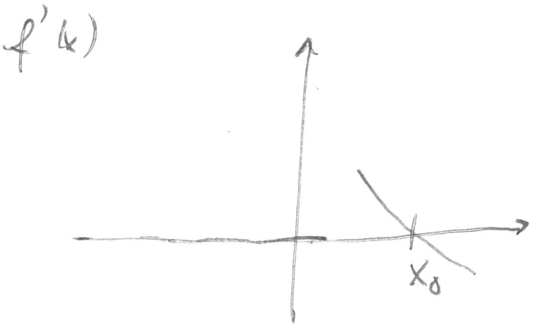
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x^3 - 3x = +\infty.$$

Def Az $f(x)$ fvnek az x_0-ban lokális maximuma (minimuma) van, ha létezik egy x_0-t tartalmazó I nyílt intervallum, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Hogyan dönthető el, hogy $f(x)$-nek x_0-ban lok. max-a van?

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f(x)$	↗	lok. max	↘
$f'(x)$	+		—



x_0-ban mon. csökken ha $f''(x_0)<0$.

Tétel Az $f(x)$ fvnek x_0-ban lok. max-a (min-a) van, ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$.

Megj. Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)=0$, akkor lehet, hogy $f(x)$-nek lok max vagy lok. min-a van, de az is lehet, hogy nincs szélsőértéke.

Pl. $f(x)=2x^3-3x^2$

$f'(x)=6x^2-6x=0 \Rightarrow x_1=0$
$x_2=1$

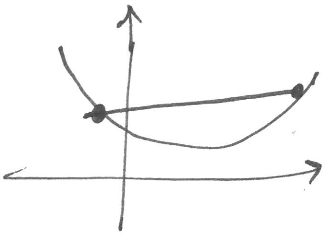
$f''(x)=12x-6$

$f''(0)=-6<0 \Rightarrow x_1=0$-ban lok max

$f''(1)=6>0 \Rightarrow x_2=1$-ben lok min

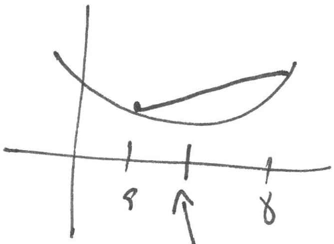
Konvexitás

Def Az $f(x)$ fv az I intervallumon konvex (konkáv), ha bármely I-ben lévő szelő a görbe felett (alatt) van.



konvex.

Feladat: Döntsük el, hogy hol konvex az f(x) fv grafikonja!



$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$x = a+(b-a)z$ $\quad 0 \le z \le 1$

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(a+(b-a)z-a\right) = \left(f(b)-f(a)\right)z$$

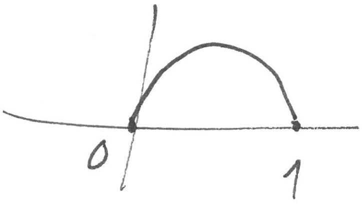
$$y = f(a) + \left(f(b)-f(a)\right)z$$

$$h(z) = f(a) + \left(f(b)-f(a)\right)z - f\left(a+(b-a)z\right)) \geq 0 \text{ ha } 0 \le z \le 1$$

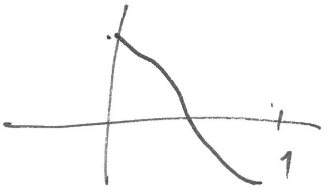
$$h(0) = f(a) - f(a) = 0$$

$$h(1) = f(a) + f(b) - f(a) - f(a+b-a) = 0$$

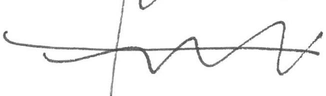
f(x) konvex, ha $h(z)$ alakja:



Ez teljesül, ha $h'(z)$



Ez teljesül, ha $h''(z)$ <0 ~~monoton~~ ~~monoton csökken~~



$$h'(z) = \frac{dh}{dz} = f(b) - f(a) - f'\left(a+(b-a)z\right)(b-a)$$

$$h''(z) = -f''\left(a+(b-a)z\right)(b-a)^2$$

$h''(z) < 0$ ha $f''(x) \not> 0$. Így

Tétel Az $f(x)$ konvex az I intervallumon, ha $f''(x) > 0$ $\forall x \in I$.

Az $f(x)$ konkáv az I intervallumon, ha $f''(x) < 0$ $\forall x \in I$.

Def Az $f(x)$ függv. az $x = x_0$ inflexiós pontja, ha x_0 konvex ágat konkávtól választ el.

Pl. $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(-2x) = 4x^2-2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$

	$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	konvex ∪	infl.p.	konkáv ∩	infl.p	konvex

Teljes függvényvizsgálat: ÉT, zérushelyek, monotonitás, szélsőértékek, konvexitás, inflexiós pontok, páros v. páratlan, periodikus, határértékek szakadási helyeken és az értelmezési tartomány szélein, értékkészlet

Pl. $f(x) = x(\ln x)^2$ ÉT: $\mathbb{R}^+$

$f(x) = x(\ln x)^2 = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1.$

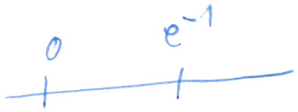
monotonitás: $f'(x) = (\ln x)^2 + x(2\ln x)\frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x\,(2+\ln x) = 0$

$\Rightarrow x_1 = e^{-2}, \; x_2 = 1$

	$0 < x < e^{-2}$	$x = e^{-2}$	$e^{-2} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

Konvexitás: $f''(x) = \frac{1}{x}(2+\ln x) + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(2+2\ln x) = 0$

$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

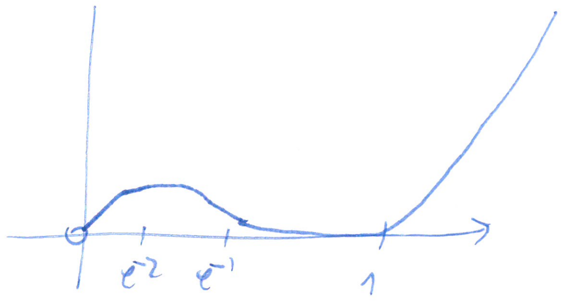


	$0<x<e^{-1}$	$x=e^{-1}$	$e^{-1}<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)^2}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -2x(\ln x) =$$

$$\lim_{x\to 0+} -2\frac{\ln x}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} -2\cdot\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0.$$



ÉK: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Globális szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Def Az $f(x)$ fv kritikus pontja az x_0, ha vagy ott az $f(x)$ nem deriválható vagy $f'(x_0)=0$.

Def Az $f(x)$ fv globális maximuma (minimuma) az I zárt intervallumon az $f(x_0)$ érték ha $\forall x\in I$ esetén $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.

Az $f(x)$ fv I-n vett globális szélsőértékei a következő helyeken lehetnek:

1, kritikus pontban

2. az I végpontjaiban

Pl. 1. $f(x) = x^2+3x+1$, $-10 \leq x \leq 10$

kritikus pontok: $f'(x) = 2x+3 = 0 \Rightarrow x = -1,5$

$f(-1,5) = (-1,5)^2 + 3(-1,5) + 1 = \underline{-1,25}$ min

végpontok: $f(10) = 10^2 + 3(10) + 1 = \underline{131}$ max

$f(-10) = (-10)^2 + 3(-10) + 1 = 71$

2. $f(x) = e^{-|x|}$ $\quad -2 \leq x \leq 3$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ deriválható kivéve $x=0$-t.

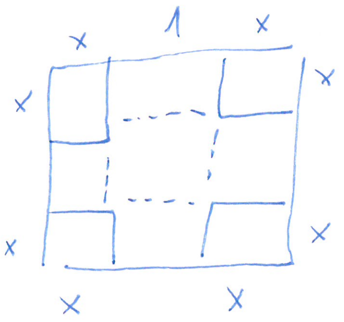
kritikus pontok: $x=0$: $f(0) = e^{-0} = \underline{1}$ max

végpontok: $f(-2) = e^{-2}$

$f(3) = \underline{e^{-3}}$ min

Szöveges szélsőérték feladatok

1.



Határozzuk meg a legnagyobb térfogatú felül nyitott dobozt!

$0 \leq x \leq 1/2$

$V(x) = (1-2x)^2 \cdot x = (1-4x+4x^2)x =$

$4x^3 - 4x^2 + x$

$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}^{\,4}}{24} \begin{cases} 1/6 \\ 1/2 \end{cases}$

$V(\frac{1}{6}) = (1 - 2\cdot\frac{1}{6})^2 \frac{1}{6} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$

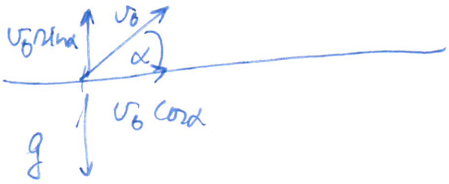
$V(\frac{1}{2}) = (1 - 2\cdot\frac{1}{2})^2 \frac{1}{6} = 0$

Végpontok: $V(\frac{1}{2}) = 0$, $V(0) = 0$

Max térfogat $x = \frac{1}{6}$-nal: $V_{max} = \frac{2}{27}$

2.) v_0 kezdősebességgel kilövünk ágyúból egy golyót. Milyen szögben lőjük ki, hogy a legmesszebbre repüljön?

Megoldás:



Mennyi ideig repül a golyó? felfelé mutató sebességkomponens:

$v_0 \sin\alpha - gt = 0$

$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

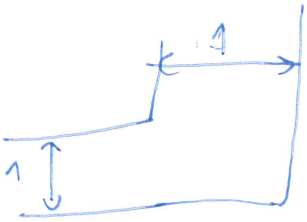
$\frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$ ideig repül

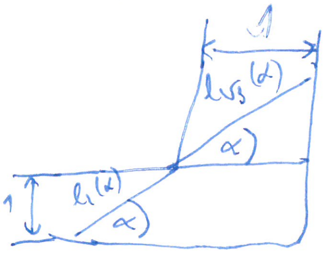
Vízszintesen megtett út: $s(\alpha) = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$

$s'(\alpha) = \frac{2 v_0^2}{g}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$s(\frac{\pi}{4}) = \frac{2 v_0^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ}{g} = \frac{v_0^2}{g}$

3.) Merőlegesen kanyarodó folyosó: Mekkora létrát lehet átvinni?





$l(\alpha) = l_1(\alpha) + l_{v3}(\alpha)$

$1 = l_1(\alpha) \sin\alpha \Rightarrow l_1(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}$

$1 = l_2(\alpha) \cos\alpha \Rightarrow l_2(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}$

$$l(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$l'(\alpha) = \frac{(-\sin\alpha + 1\cdot\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\alpha - (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$\frac{-\cancel{\sin^2\alpha\cos\alpha} + 1\cdot\cancel{\sin\alpha\cos^2\alpha} - \cos^3\alpha + \cancel{\sin^2\alpha\cos\alpha} - 1\cdot\cancel{\sin\alpha\cos^2\alpha} + 1\cdot\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

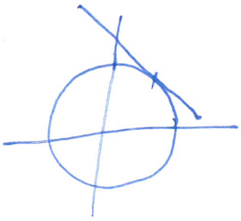
$$= \frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$l_{max} = \frac{1}{\sin\pi/4} + \frac{1}{\cos\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} + \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Implicit fv deriválása

Kérdés: Az $F(x,y)=0$ alakban adott görbe (x_0, y_0) pontjában hogyan határozható meg az érintő meredekségét?

Pl. 1. Határozza meg az $x^2+y^2=25$ kör $(3,4)$ pontjában az érintő meredekségét!



$$x^2+y^2=25 \overset{()'}{\Rightarrow} 2x+2y\cdot y'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$y' = -\frac{3}{4}$$

2. $x^2+xy+y^3=3$ görbe $(1,1)$ pontbeli deriváltja

$$2x+y+x\cdot y' + 3y^2y' = 0$$

$$2x+y+y'(x+3y^2)=0$$

$$y' = -\frac{2x+y}{x+3y^2}$$

$$y' = -\frac{2\cdot1+1}{1+3\cdot1^2} = -\frac{3}{4}$$

3. Az $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipszis mely pontjában párhuzamos az érintő az $x+3y+6=0$ egyenessel?

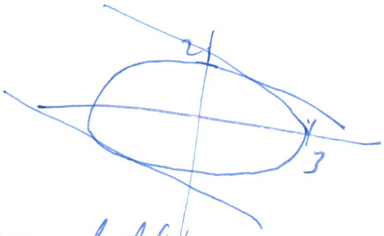
$y=-\frac{x}{3}-2 \Rightarrow m=-\frac{1}{3}$

$\frac{2x}{9}+\frac{2y\cdot y'}{4}=0 \Rightarrow y'=-\frac{\frac{2x}{9}}{\frac{2y}{4}}=\frac{4x}{9y}=-\frac{1}{3} \Rightarrow -12x=9y$

$y=-\frac{4}{3}x$

$\frac{x^2}{9}+\frac{\frac{16}{9}x^2}{4}=0 \Rightarrow \frac{5x^2}{9}=0$ $\quad x=\pm\sqrt{1,8}$

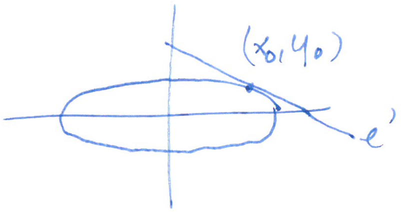
$y=\pm\sqrt{3,2}$



$(\sqrt{1,8},\sqrt{3,2})$ és $(-\sqrt{1,8},-\sqrt{3,2})$

4. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, melyik átmegy a $(0,2)$ ponton és érinti az $x^2+4y^2=4$ ellipszist!

$2x+4\cdot 2y\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{4y}$



e': $y-y_0=-\frac{x_0}{4y_0}(x-x_0)$

$2-y_0=-\frac{x_0}{4y_0}(-x_0)=\frac{x_0^2}{4y_0}$

$8y_0-4y_0^2=x_0^2=4-4y_0^2$

$8y_0=4$

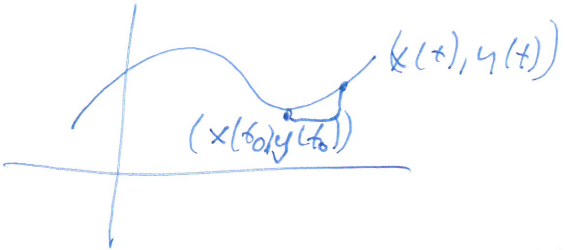
$y_0=1/2$

$x_0^2+4\cdot\frac{1}{4}=4 \Rightarrow x_0^2=3$

$x_0=\pm\sqrt{3}$

$(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ és $(\sqrt{3},-\frac{1}{2})$

Paraméteresen adott fv deriváltja



$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$m \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$$

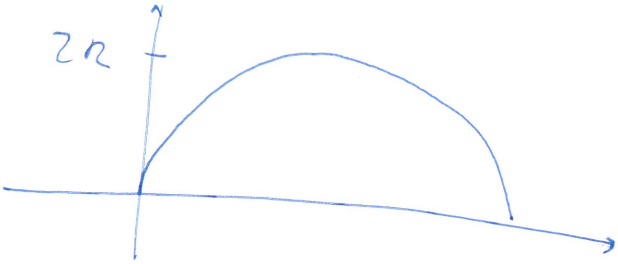
$$m = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}{\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

Pl. 1. $x = t$
$y = t^2 + 1$

$t = 1$-be érintő meredeksége

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t}{1} = \frac{2}{1}$$

2.

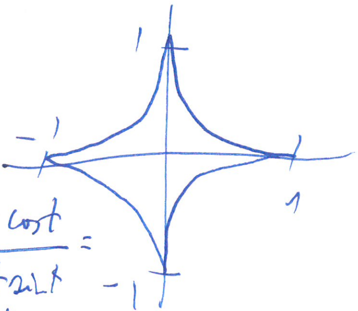


Ciklois: $x = R(t - \sin t)$
$y = R(1 - \cos t)$
$t = \pi/4$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{R \sin t}{R(1-\cos t)}^{*}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{R \sin\frac{\pi}{4}}{R(1-\cos\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

3. Asztrois



$x = \cos^3 t$ $m\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$y = \sin^3 t$

$$y'(\pi/3) = \frac{\dot{y}(\pi/3)}{\dot{x}(\pi/3)} = -tg(\pi/3) = -\sqrt{3}$$

$$\dot{y} = 3\sin^2 t \cos t, \quad \dot{x} = 3\cos^2 t(-\sin t)$$

$$y' = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -tg\, t$$

Taylor - polinom

n-edrendű polinom: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, $a_i\in\mathbb{R}$.

Kérdés: Az n-edrendű Taylor-polinomok közül melyik közelíti legjobban az $f(x)$ fvt egy $x=a$ hely kis környezetében?

Válasz: Az a $p(x)$ polinom, melynek fvértéke és első n deriváltja megegyezik $f(x)$ fvértékével és első n deriváltjával az $x=a$ helyen. Vagyis

$$f(a)=p(a)$$
$$f'(a)=p'(a)$$
$$f''(a)=p''(a)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(a)=p^{(n)}(a).$$

$p(x)$-et a következő alakban keressük:

$$p(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\dots+c_n(x-a)^n, \quad c_i=?$$
$$p'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\dots+nc_n(x-a)^{n-1}$$
$$p''(x)=2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)+\dots+n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$
$$p'''(x)=3!c_3+\dots+n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(x)=n!c_n$$

$$\Rightarrow p(a)=c_0,\ p'(a)=c_1,\ p''(a)=2c_2,\ p'''(a)=3!c_3,\dots$$
$$p^{(k)}(a)=k!c_k,\dots,\ p^{(n)}(a)=n!c_n$$

Def Tfh., hogy az $f(x)$ fv az $x=a$ helyen n-szer diffható. Ekkor az $f(x)$ fv $x=a$ helyhez tartozó n-edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Megj $T_n(a)=f(a)$, $T_n'(a)=f'(a)$, $T_n''(a)=f''(a)$, ..., $T_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$.

Röviden $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Pl. 1.

$f(x)=e^x$, $a=0$, $n=5$	$f(0)=1$
$f'(x)=e^x$	$f'(0)=1$
$f''(x)=e^x$	$f''(0)=1$
$f'''(x)=e^x$	$f'''(0)=1$
$f^{(4)}(x)=e^x$	$f^{(4)}(0)=1$
$f^{(5)}(x)=e^x$	$f^{(5)}(0)=1$

$$T_5(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5=$$

$$1+1\cdot x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5=\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k}{k!} \qquad (0!=1)$$

Hasonlóan: $f(x)=e^x$, $a=0$ esetén:

$$T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

2. $f(x)=x^3+3x^2+5x+1, \quad a=1, n=3$

$f'(x)=3x^2+6x+5$

$f''(x)=6x+6$

$f'''(x)=6$

$f(1)=10$

$f'(1)=14$

$f''(1)=12$

$f'''(1)=6$

$$T_3(x)=10+14(x-1)+\frac{12}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3=$$

$$10+14(x-1)+6(x^2-2x+1)+(x^3-3x^2+3x-1)=x^3+3x^2+5x+1$$

3. $f(x)=\cos x, \quad a=0, \quad n=6$

$f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$

$f'''(x)=+\sin x$

$f^{(4)}(x)=\cos x$

$f^{(5)}(x)=-\sin x$

$f^{(6)}(x)=-\cos x$

$f(0)=1$

$f'(0)=0$

$f''(0)=-1$

$f'''(0)=0$

$f^{(4)}(0)=1$

$f^{(5)}(0)=0$

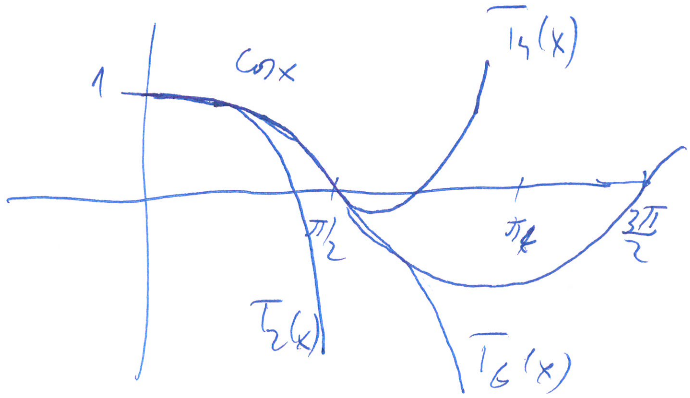
$f^{(6)}(0)=-1$

$$T_6(x)=1+0(x-0)+\frac{-1}{2!}(x-0)^2+\frac{0}{3!}(x-0)^3+\frac{1}{4!}(x-0)^4+\frac{0}{5!}(x-0)^5$$

$$+\frac{-1}{6!}(x-0)^6=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$$

$$T_2(x)=1-\frac{x^2}{2!}$$

$$T_4(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$



Taylor-tétele Tegyük fel, hogy $f(x)$ az $[a,b]$-ben $(n+1)$-szer diffható és $(n+1)$-edik deriváltja folyt.os. Ekkor létezik $c \in (a,b)$ vagy $c \in (b,a)$, hogy

$$f(b) = T_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \text{ ahol}$$

$T_n(x)$ az $f(x)$ $x=a$ körüli n-edrendű Taylor-polinomja.

Köv 1. $$|f(b)-T_n(b)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| |b-a|^{n+1} \le \max_{\substack{a\le x\le b \\ \text{v.} \\ b\le x\le a}} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |b-a|^{n+1}.$$

2. $n=0$: $$f(b) = T_0(b) + \frac{f'(c)}{1!}(b-a)^1 = f(a) + f'(c)(b-a)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(Lagrange-tétel)}$$

Pl. 1. Mekkora hibát vétünk, ha e-t az ~~$a=0$ körül~~ $f(x)=e^x$, $a=0$ körüli 5-ödrendű Taylor-polinomjával becsüljük?

$e = e^1 = f(1)$ $\qquad a=0, \; b=1$

$$|f(1)-T_5(1)| \le \max_{0\le x\le 1} \frac{f^{(6)}(x)}{6!}|1-0|^6 = \max_{0\le x\le 1}\frac{e^x}{6!} = \frac{e}{6!} \le \frac{3}{720}.$$

$\frac{1}{240}$

$$\left|e - \left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right)\right| < 1/240.$$

2. Becsüljük meg az e-t 10^{-6} hibával az $f(x)=e^x$ $a=0$ körül vett Taylor-polinomjainak segítségével!

$f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=e^0=1$

$T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

$$|f(1)-T_n(1)|\le \max_{0\le x\le 1}\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}|1-0|^{n+1}=\max_{0\le x\le 1}\frac{e^x}{(n+1)!}=\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

Ha $\frac{3}{(n+1)!}<10^{-6}$, azaz $3.000.000<(n+1)!$, akkor n jó

$3\cdot 10^6<10! \Rightarrow n=9$ megfelelő, azaz

$$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}\right)\right|<10^{-6}$$

3. Határozzuk meg az $f(x)$ fv $a=0$ helyen vett azon Taylor-polinomját, melyre $|T_n(x)-\sin x|\le 10^{-2}$ $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$|T_n(x)-\sin x|\le \max_{\substack{0\le z\le x\\ x\le z\le 0}}\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}|x-0|^{n+1}\le\frac{(\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f(x)=\sin x \Rightarrow f^{(n+1)}(x)=\pm\begin{smallmatrix}\sin x\\ \cos x\end{smallmatrix} \Rightarrow |f^{(n+1)}(t)|\le 1$

Elég: $\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}\le 10^{-2}$ $\quad\frac{\pi^{11}}{11!}\le 10^{-2}\Rightarrow n=10$

$|T_{10}(x)-\sin x|\le 10^{-2}$

$T_{10}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$

Nevezetes Taylor polinomok

$a=0$

$f(x)=e^x$: $T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

$f(x)=\sin x$: $T_{2n+1}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$f(x)=\cos x$: $T_{2n}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$f(x)=\text{ch}\, x$: $T_{2n}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$f(x)=\text{sh}\, x$: $T_{2n+1}(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$f(x)=\frac{1}{1-x}$: $T_n(x)=1+x+x^2+\dots+x^n$

Görbék pontbeli érintkezése, görbület, simulókör

Def Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ görbék n-edrendben érintkeznek egymással az $x=a$ helyen, ha

$$\begin{aligned} f(a)&=g(a)\\ f'(a)&=g'(a)\\ f''(a)&=g''(a)\\ &\vdots\\ f^{(n)}(a)&=g^{(n)}(a), \end{aligned}$$

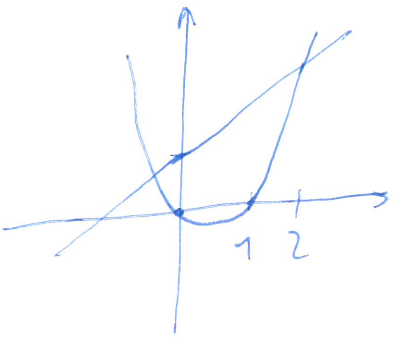
de $f^{(n+1)}(a)\neq g^{(n+1)}(a)$.

Pl. 1. $f(x)=x^2-x$, $g(x)=x$, $a=2$

$f'(x)=2x-1$, $g'(x)=1$

$f(2)=2=g(2)$

$f'(2)=3\neq g'(2)=1 \Rightarrow$ 0-adrendű érintkezés



0-adrendű érintkezés: metszés

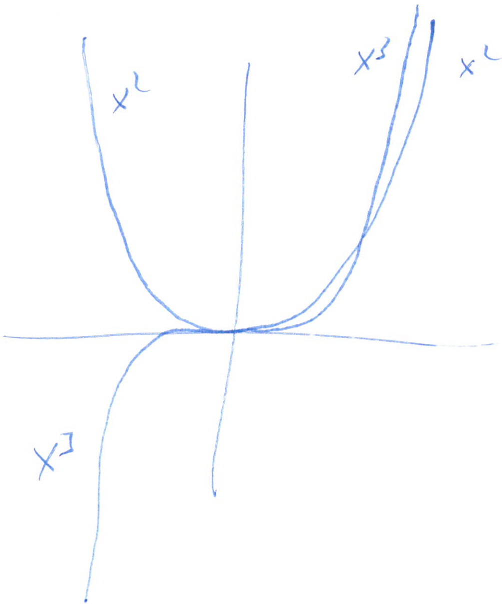
2. $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, $a=0$

$f'(x)=2x$, $g'(x)=3x^2$

$f''(x)=2$, $g''(x)=6x$

$f(0)=0=g(0)$, $f'(0)=0=g'(0)$, $f''(0)=2\neq g''(0)=0$

$\Rightarrow$ elsőrendű érintkezés



legalább elsőrendű érintkezés: közös érintő

3. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin^2 x$, $a=0$ $f(0)=0=g(0)$

$f'(x)=2x$, $g'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$ $f'(0)=0=g'(0)$

$f''(x)=2$, $g''(x)=2\cos 2x$ $f''(0)=2=g'(0)$.

$f'''(x) = 0$, $g'''(x) = -4\sin 2x$ $f'''(0) = 0 = g'''(0)$

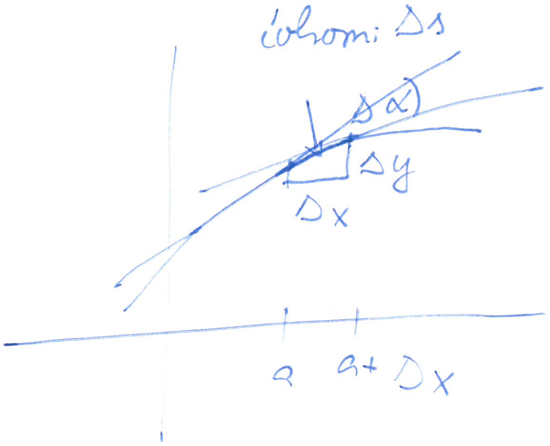
$f^{(IV)}(x) = 0$, $g^{(IV)}(x) = -8\cos 2x$ $f^{(IV)}(0) = 0 \neq g^{(IV)}(0) = -8$

$\Rightarrow$ $f(x)$ és $g(x)$ harmadrendben érintkezik $a=0$-ban.

Legalább másodrendű érintkezés: közös görbület

<u>Def</u> Az $f(x)$ görbe $x=a$ pontbeli görbültségét az érintő elfordulását mutatja az ívhosszhoz viszonyítva.

Precízen:



$$G = G(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

Kiindulás:

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x \approx \sqrt{1 + (f'(a))^2}\,\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \sqrt{1 + (f'(a))^2}$$

$$f'(a) = \mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow \alpha = \alpha(a) = \mathrm{arctg}\, f'(a)$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} \approx \alpha'(a) = \frac{f''(a)}{1 + (f'(a))^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\frac{f''(a)}{1+f'(a)^2}}{\sqrt{1+f'(a)^2}} = \frac{f''(a)}{(1+f'(a)^2)^{3/2}}.$$

Tehát a görbületfv: $G(x) = \dfrac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$.

Megj: 1. Ha két görbe legalább másodrendben érintkezik $x=a$-ban, akkor a görbületük megegyezik ott.

2. Ha $G(x)\equiv 0 \iff f''(x)\equiv 0 \iff f'(x)=a \iff f(x)=ax+b$, azaz $G(x)\equiv 0$ pontosan akkor, ha $f(x)$ egy egyenes.

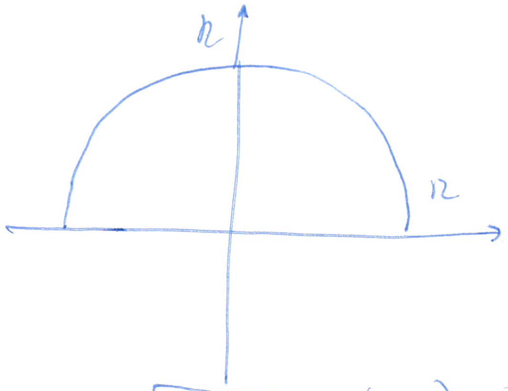
Pl. 1. $y=x^2$, $a=1$

$f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$

$f(1)=1$, $f'(1)=2$, $f''(1)=2$

$$G(1)=\frac{2}{(1+4)^{3/2}}=\frac{2}{5^{3/2}}$$

2.



$$y=\sqrt{R^2-x^2}=(R^2-x^2)^{1/2}$$

$$y'=\frac{1}{2}(R^2-x^2)^{-1/2}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$y''=\frac{-1\sqrt{R^2-x^2}-(-x)\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}=\frac{-\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}=$$

$$-\frac{\frac{R^2-x^2+x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}=-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}$$

$$G(x)=\frac{-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\left(1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\left(\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}\right)^{3/2}}=\frac{-\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{\frac{R^3}{(R^2-x^2)^{3/2}}}=-\frac{1}{R}$$

3. $x=2\cos t,\ y=\sin t$ ellipszis. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1^2}=1$

$$y'=\frac{\dot y}{\dot x} \qquad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ddot y\dot x-\dot y\ddot x}{(\dot x)^3}$$

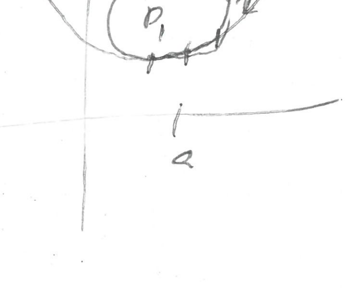
$$\frac{dy'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)=\frac{\ddot y\dot x-\dot y\ddot x}{(\dot x)^2}$$

$$y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{\cos t}{-2\sin t}=-\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,t$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{+\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 t}}{-2\sin t}=-\frac{1}{4\sin^3 t}$$

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{4\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\left(1+\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2}\right)\right)^{3/2}}=-\frac{1}{4}$$

Def Adott egy $f(x)$ fv és egy $x=a$ pont. Azt az $(x-u)^2+(y-v)^2=R^2$ kört, ami (legalább) másodrendben érintkezik az $f(x)$ görbével az $x=a$-ban az $f(x)$ fv $x=a$-beli simulókörének hívjuk.



P_0 környékében választok P_1 és P_2 pontokat, ezeken keresztül kört húzok. Ha $P_1, P_2 \to P_0$, akkor a körök határhelyzete a simulókör.

A kör egyenletet leíró fv explicit alakja:

$(x-u)^2+(y-v)^2=R^2$, ahol $y(a)=f(a)$, $y'(a)=f'(a)$, $y''(a)=f''(a)$.

Ekkor deriválással:

$$2(x-u)+2(y-v)y'=0 \qquad /\cdot()'$$

$$2+2(y')^2+2(y-v)y''=0 \Rightarrow y-v=-\frac{1+(y')^2}{y''}$$

$$v=y+\frac{1+(y')^2}{y''}$$

$$v=y(a)+\frac{1+(y'(a))^2}{y''(a)}=f(a)+\frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)}$$

$$x-u=-(y-v)y'=\frac{1+(y')^2}{y''}y'=\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}f'(a)$$

$$u=a-\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}f'(a)$$

$$(x-u)^2+(y-v)^2=R^2$$

$$\left(\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}f'(a)\right)^2+\left(-\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}\right)^2=R^2$$

$$\frac{(1+f'(a))^2}{f''(a)^2}(f'(a)^2+1)=\frac{(1+f'(a)^2)^3}{f''(a)^2}=R^2 \Rightarrow$$

$$R=\left|\frac{(1+f'(a)^2)^{3/2}}{f''(a)}\right|=\left|\frac{1}{\frac{f''(a)}{(1+f'(a)^2)^{3/2}}}\right|=\left|\frac{1}{G(a)}\right|$$

Tehát a simulókör sugara a görbület reciprokának abszolút értéke.

Megj. Egy R sugarú kör simulóköre önmaga, tehát

$$|G| = \frac{1}{R}.$$

Pl. $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$ -ben simulókör

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1, \quad f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0, \quad f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\tfrac{\pi}{2} = -1$$

$$G = \frac{-1}{(1+0^2)^{3/2}} = -1 \Rightarrow R = 1$$

$$u = \frac{\pi}{2} - \frac{1+0^2}{-1} \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$v = 1 + \frac{1+0^2}{-1} = 0$$

Simulókör: $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1^2$