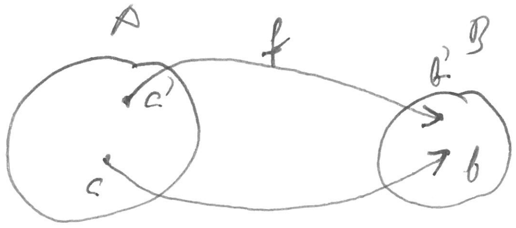
Függvények

Def Legyen A és B két halmaz. Ha minden $a \in A$-hoz hozzárendelünk egy B-beli elemet, akkor egy A-ból B-be képező függvényt definiálunk.



$b = f(a)$

Def Az f fv értelmezési tartománya a A halmaz. Jele: D_f vagy ÉT.

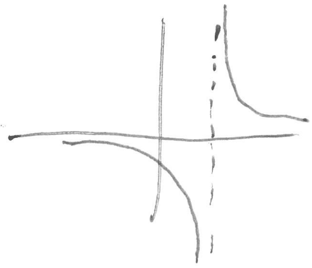
Azon B-beli elemek halmaza, amiket hozzárendelünk alkotják az f fv értékkészletét, azaz a

$$\{ b : b \in B, \exists a \in A, f(a) = b \}.$$

Jelölés: R_f vagy ÉK.

Olyan f fvekkel foglalkozunk, ahol a D_f a valós számok halmaza vagy a valós számok egy részhalmaza.

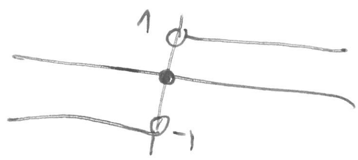
Pl. 1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

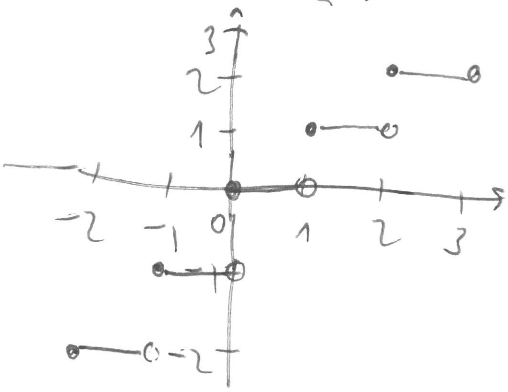
2. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$



$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \{-1, 0, 1\}$

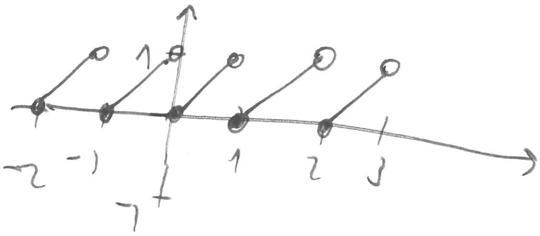
3., $f(x) = [x]$



$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{N}$

4., $f(x) = \{x\}$



$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = [0,1[$

Tulajdonságok

1. Az $f(x)$ fv szigorúan monoton nő (csökken) ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

   Pl. szig mon nő: $f(x) = x, x^3, e^x$

   szig mon csökken: $f(x) = -x$

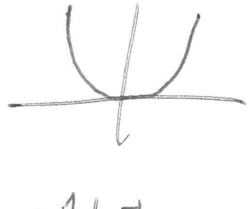
2. Az $f(x)$ fv monoton nő (csökken), ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$

   Pl. mon nő: $f(x) = x, [x]$

   mon csökken: $f(x) = -x^3, -[x]$

3. Az $f(x)$ fv páros ha $f(x) = f(-x)$, azaz $f(x)$ fv grafikonja az y tengelyre szimmetrikus.

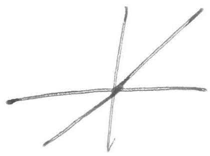
   pl. $f(x) = x^2$



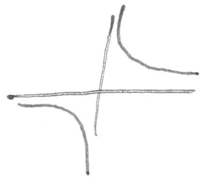
   $\cos x$

4.) Az $f(x)$ fv páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$, azaz $f(x)$ fv grafikonja az origóra szimmetrikus.

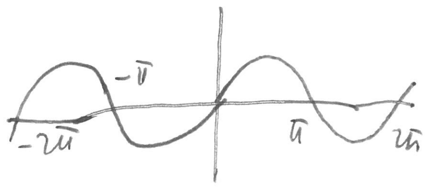
Pl. $f(x) = x$



$\frac{1}{x}$



$\sin x$



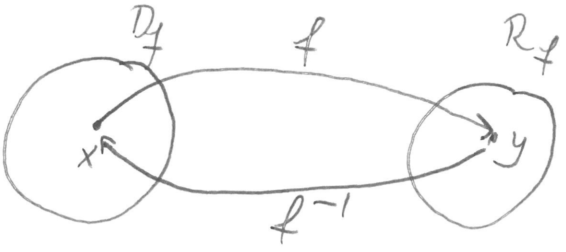
5.) Az $f(x)$ fv periodikus ha létezik l, hogy $f(x+l) = f(x)$

Pl. $f(x) = \sin x, \cos x, \{x\}$

6.) Az $f(x)$ fv kölcsönösen egyértelmű, ha $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverz fvek

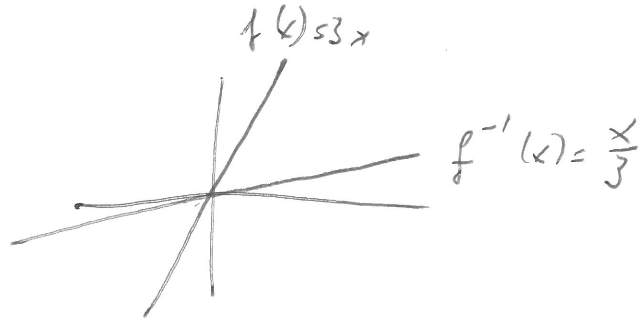
Tfh az $y = f(x)$ fv kölcsönösen egyértelmű.



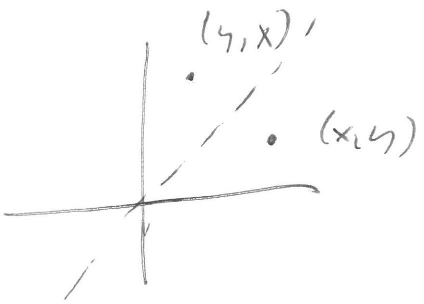
Ha $y = f(x)$, akkor az y-hoz x-et rendelő fvt az $f(x)$ fv inverzének hívjuk. Jelölés: $x = f^{-1}(y)$.

Ekkor $y = f(f^{-1}(y))$ és $x = f^{-1}(f(x))$.

Pl. 1. $y = f(x) = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$



megj. Az f fv grafikonjában az (x,y) pontokat az f^{-1} fv grafikonjában pedig az (y,x) pontokat ábrázoljuk, ezért az f grafikonjából az f^{-1} grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az $y=x$ egyenesre tükrözünk.



2. $f(x) = \frac{3}{2+x} = y \Rightarrow 3 = y(2+x)$

$yx + 2y = 3$

$yx = 3 - 2y$

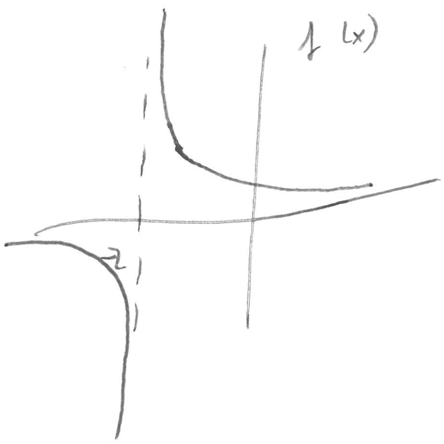
$x = \frac{3-2y}{y} = \frac{3}{y} - 2$

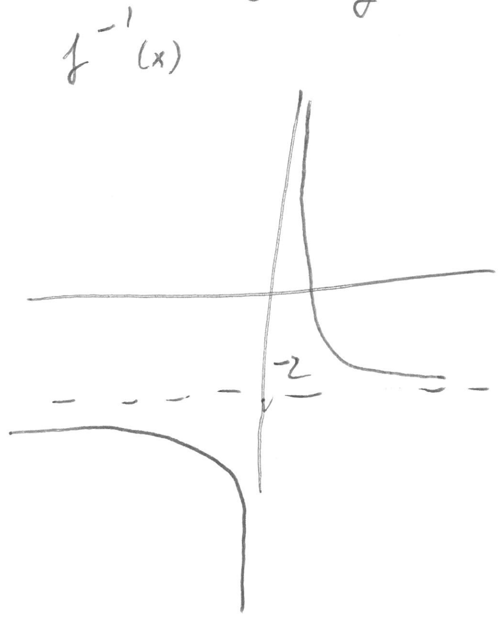
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

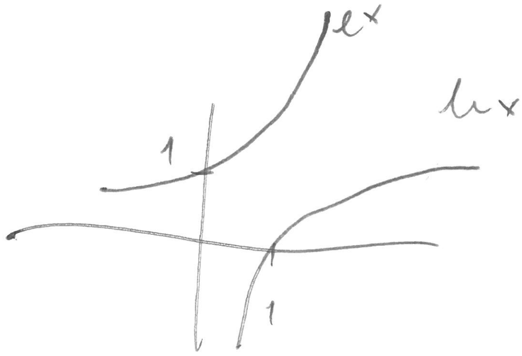
$R_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$



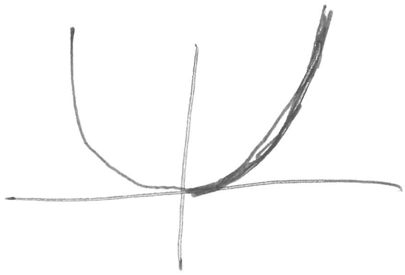


3. $f(x)=e^x=y \Rightarrow x=\ln y=f^{-1}(y)$

$f^{-1}(x)=\ln x$



4. $f(x)=x^2=y$ nem kölcsönösen egyértelmű fv, emiatt nincs inverze. Ha az $x \geq 0$ megszorítást tesszük, akkor már kölcsönösen egyértelmű.

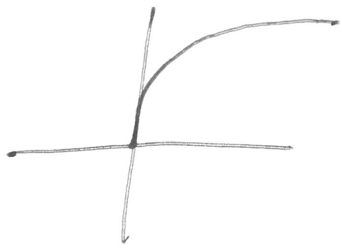


$y=x^2$

$x=\pm\sqrt{y}$

$x=+\sqrt{y}=f^{-1}(y)$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$



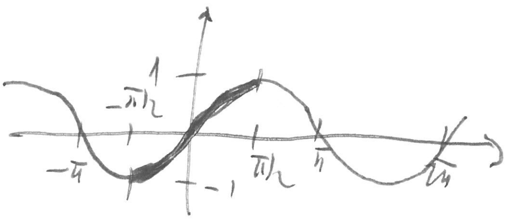
Függvények osztályozása

- Függvények
  - algebrai
    - racionális
      - polinomok: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$
      - törtfv: $\frac{pol}{pol}$
    - irracionális, pl. $\sqrt{x}$
  - transzcendens
    - exp és log
    - trigonometrikus és inverzeik
    - hiperbolikus és inverzeik

Trigonometrikus fvek és inverzeik

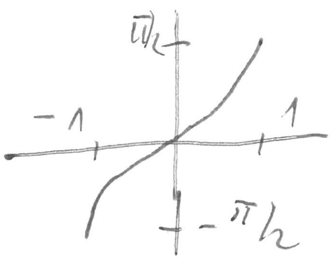
1. $f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1,1]$



$[-\pi/2, \pi/2]$-ben kölcsönösen egyértelmű és minden $[-1,1]$-beli értéket felvesz, emiatt ott értelmezzük az inverzét:

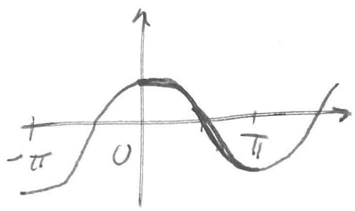
$f^{-1}(x) = \arcsin x$



$D_{f^{-1}} = [-1,1]$

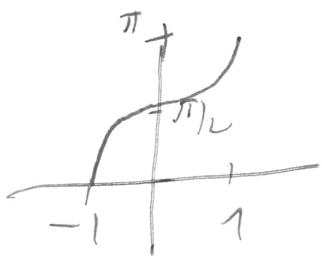
$R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2. $f(x) = \cos x$ $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1,1]$



$[0,\pi]$-ben kölcsönösen egyértelmű

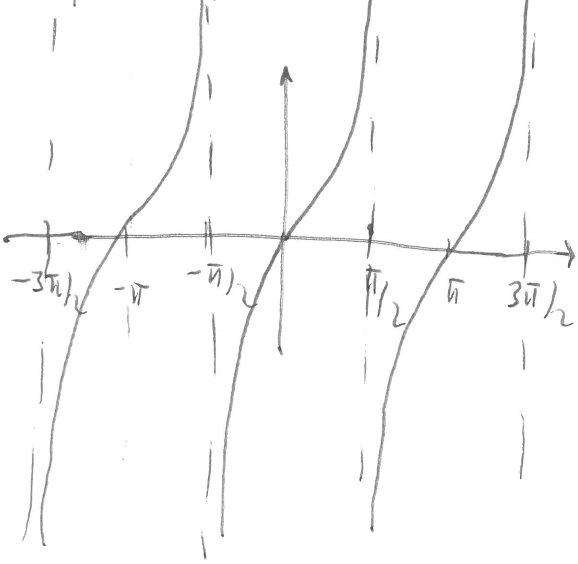
$f^{-1}(x) = \arccos x$



$D_{f^{-1}} = [-1,1]$

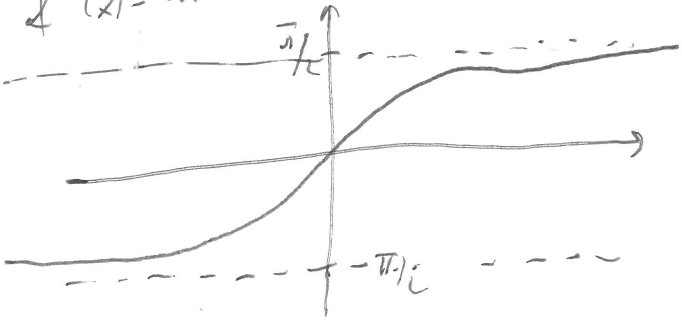
$R_{f^{-1}} = [0,\pi]$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}, \quad R_f = \mathbb{R}$



$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$-ben kölcsönösen egyértelmű

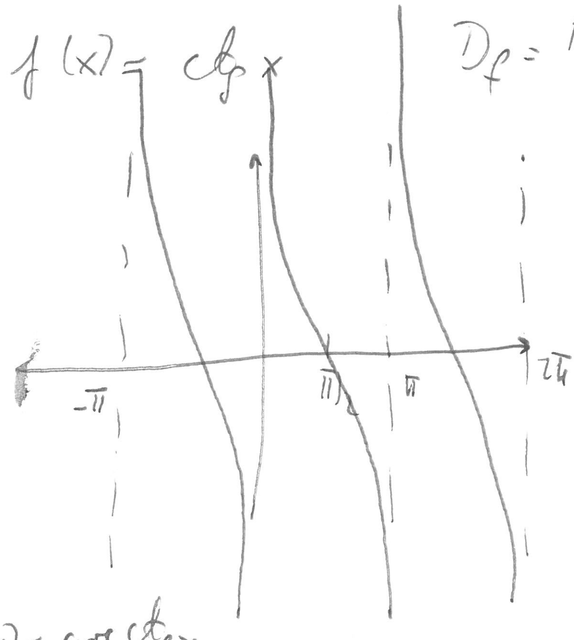
$f^{-1}(x) = \arctan x$



$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

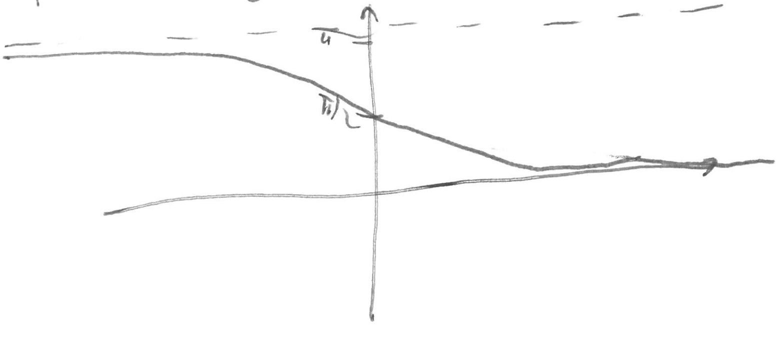
$R_{f^{-1}} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

4. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, \quad R_f = \mathbb{R}$



$]0, \pi[$-ben kölcsönösen egyértelmű

$f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$



$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f =]0, \pi[$

Pl. 1. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, mert a $\sin x = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ egyenletnek

$x = \frac{\pi}{6}$ a megoldása

2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

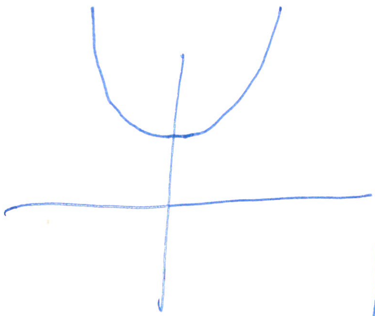
3. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

4. $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) = \sqrt{\cos^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)} =$

$-\frac{\pi}{2} < \arcsin\frac{4}{5} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) > 0$

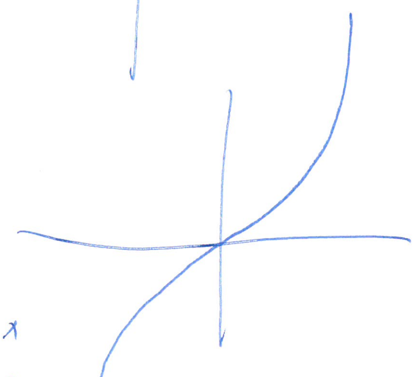
$\sqrt{1-\left(\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Hiperbolikus fv-ek



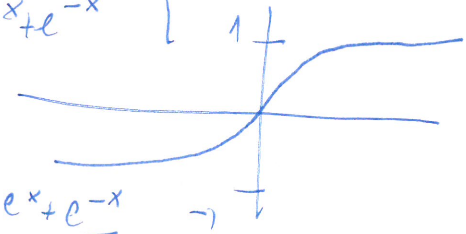
Koszinuszhiperbolikusz: $\operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [1, +\infty[$



Szinuszhiperbolikusz: $\operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$

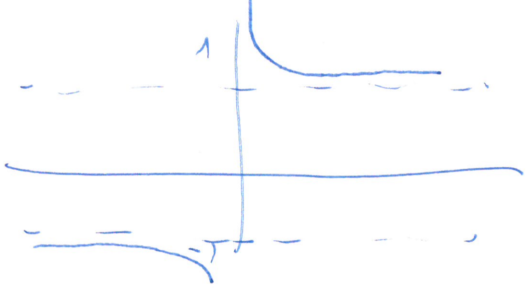


Tangenshiperbolikusz: $\operatorname{th} x = \tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-1, 1[$

Kotangenshiperbolikusz: $\operatorname{cth} x = \coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$



$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

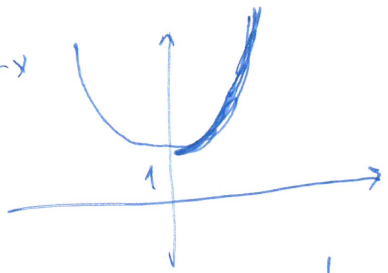
$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

Hiperbolikus fvk inverzei

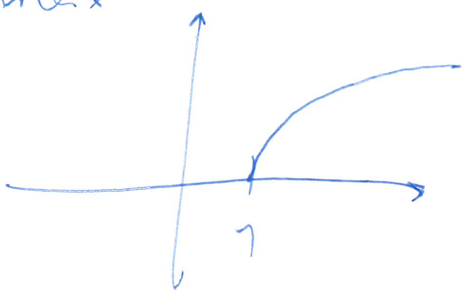
Areakoszinuszhiperbolikusz:

ch x



→

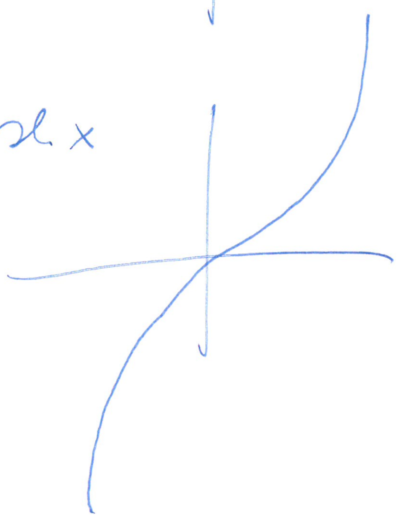
arch x



$D_f = [1, +\infty[$

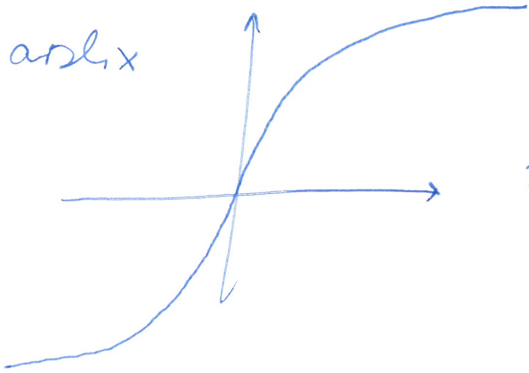
$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

sh x



→

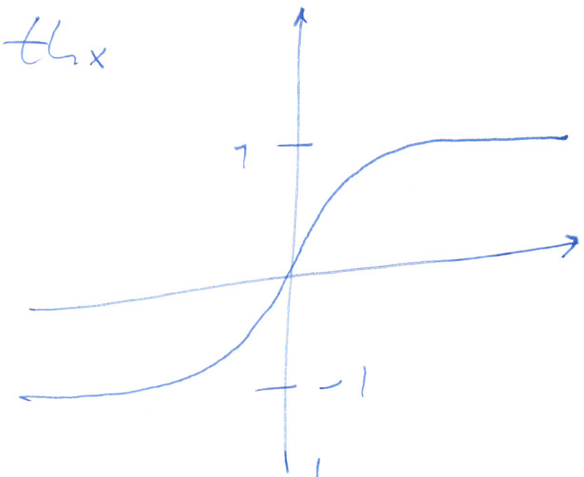
arsh x



$D_f = \mathbb{R}$

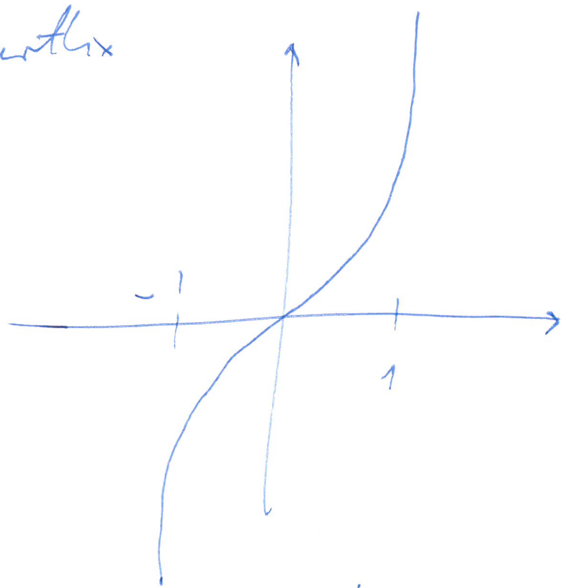
$R_f = \mathbb{R}$

th x

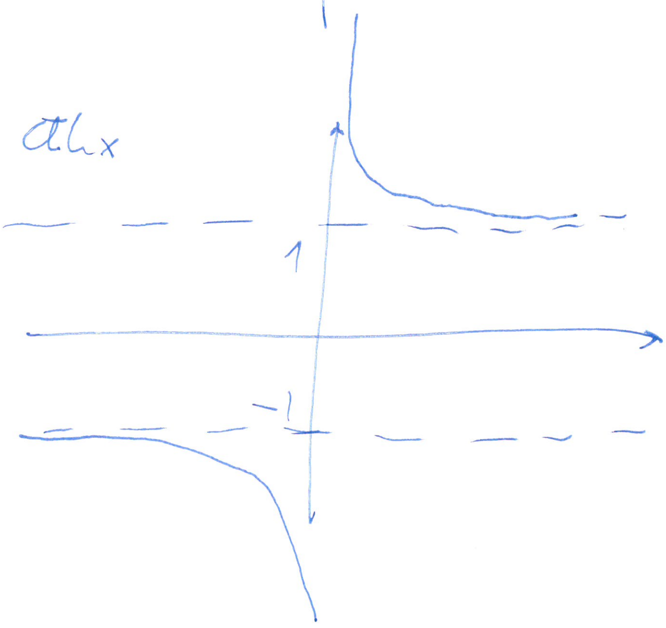


→

arth x

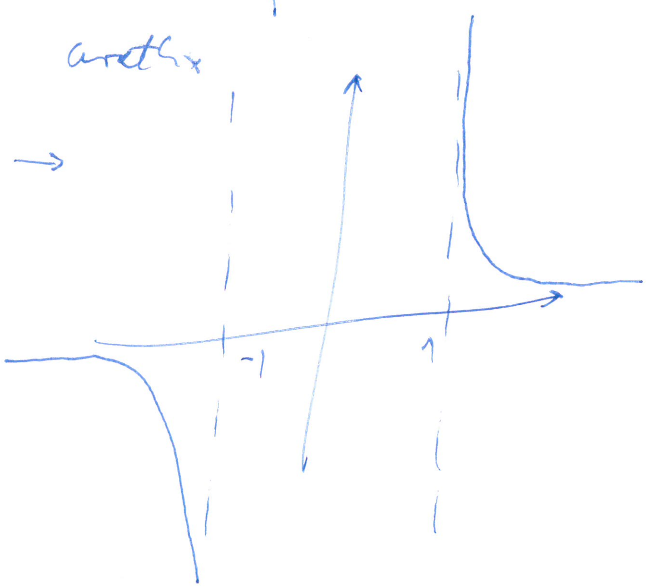


cth x



→

arcth x



$y = \operatorname{arsh} x$ kiszámítása

$\operatorname{sh} y = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = x$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y} \Rightarrow 2x e^y = (e^y)^2 - 1 \Rightarrow$$

$$(e^y)^2 - 2x e^y - 1 = 0 \Rightarrow (e^y)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} =$$

$$x \pm \sqrt{x^2+1}$$

$$e^y > 0 \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Hasonlóan:

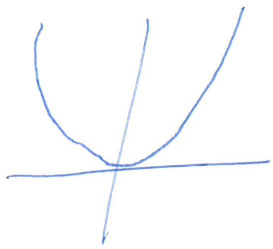
$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $\quad x \geq 1$

$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $\quad$ ha $|x| < 1$

$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $\quad$ ha $|x| > 1$

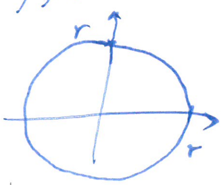
Görbék megadási módjai

1. Explicit módon: $y = f(x)$ $\quad$ pl. $y = x^2$

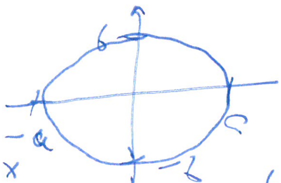


2. Implicit módon: $F(x,y) = 0$

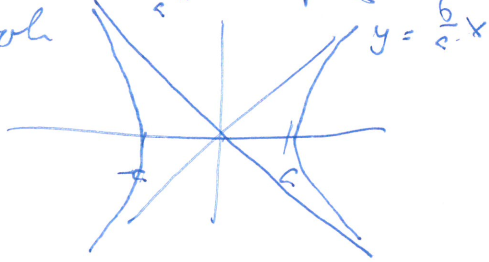
Pl. 1. $x^2 + y^2 = r^2$



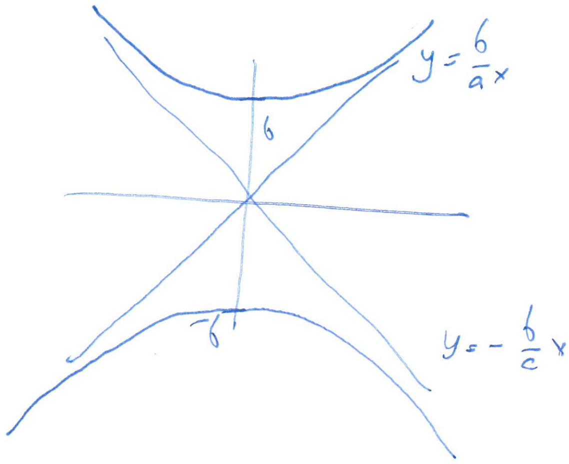
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis:



3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola

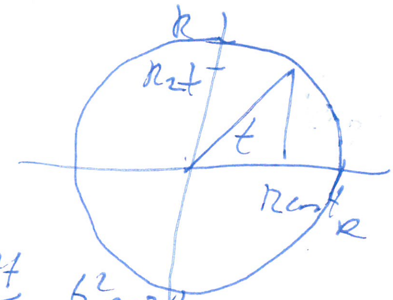


4.) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



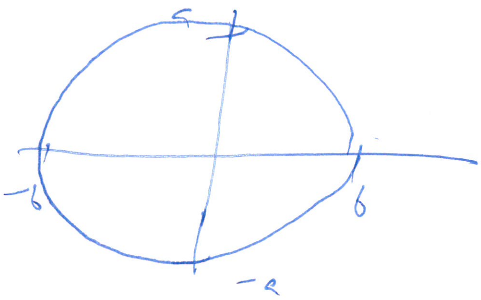
3. Paraméterezés: $x=x(t)$, $y=y(t)$ $\quad t\in[a,b]$

Pl. 1. $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $\quad 0\le t\le 2\pi$



2. $\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$

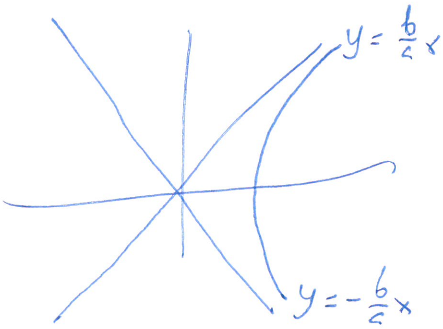
$0\le t\le 2\pi$



ellipszis

3. $\left.\begin{array}{l} x=a\,\mathrm{ch}\,t \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\mathrm{ch}^2 t}{a^2}-\frac{b^2\mathrm{sh}^2 t}{b^2}=$

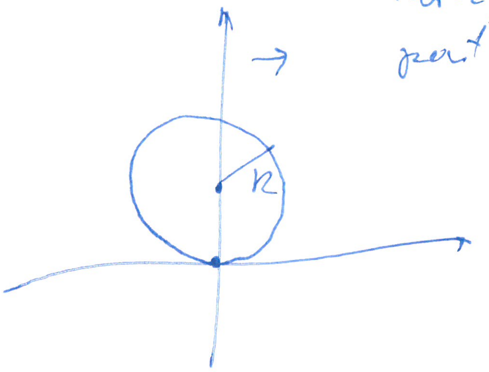
$a>0$ $\quad t\in\mathbb{R}$ $\quad \mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1$ hiperbola



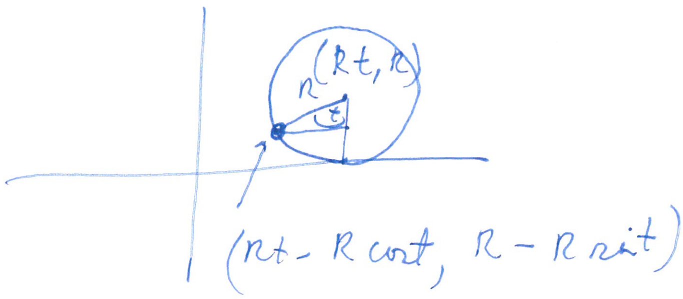
$a\,\mathrm{ch}\,t>0$

4.,)

Kerék, elgurítjuk. Az eredetileg legalsó pont milyen pályát ír le?

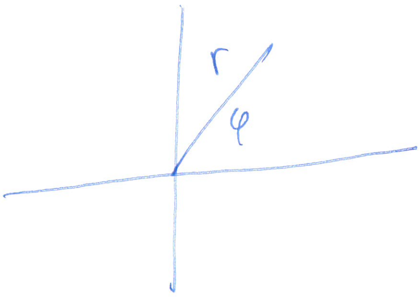


Ha a középpont Rt-nyit ment előre:



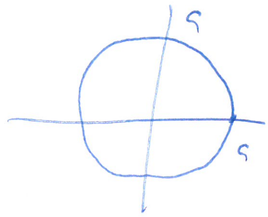
$$x = R(t - \cos t)$$
$$y = R(1 - \sin t)$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

Polárkoordináták:

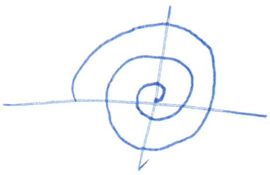


$\varphi \to r = r(\varphi)$

Pl. 1. $r = a$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

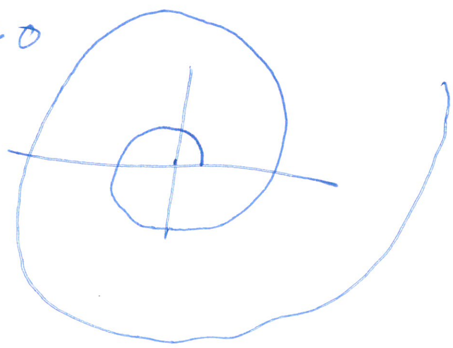


2. $r = a\varphi$ $\qquad \varphi \ge 0$



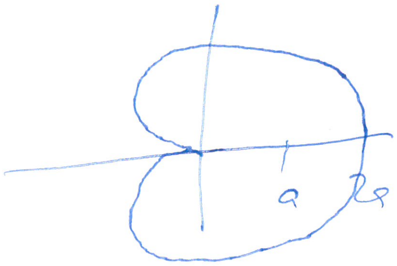
Archimédeszi spirál

3. $r = e^{a\varphi}$ $\qquad a > 0,\ \varphi \ge 0$



logaritmikus spirál

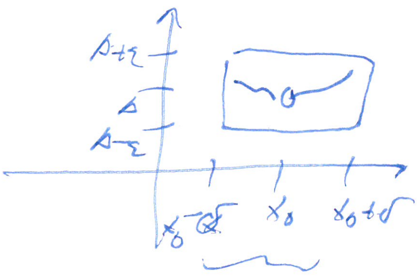
4. kardioid $r = a(1+\cos\varphi)$ $0 \le \varphi \le 2\pi$



Függvény határértéke

Def Az $f(x)$ fv határértéke az x_0 helyen az A szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, hogy

$|f(x) - A| < \varepsilon$ ha $0 < |x - x_0| < \delta$.



Jelölés $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Megj: Akkor is lehet, hogy van az x_0-ban határérték, ha x_0-ban nem értelmezett a fv.

Ekvivalens def: Az $f(x)$ fv x_0 helyen vett határértéke az A szám, ha minden x_n sorozatra, melyre $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, teljesül hogy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

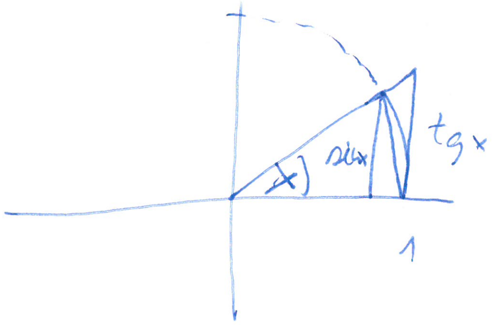
Pl. 1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3^2 - 4}{3 - 2} = 5$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$?

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=2+2=4$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=?$

$x>0$:



$$\text{ter}_{\triangle} < \text{ter}_{\triangleleft} < \text{ter}_{\triangle}$$

$$\frac{\sin x\cdot 1}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg} x\cdot 1}{2}$$

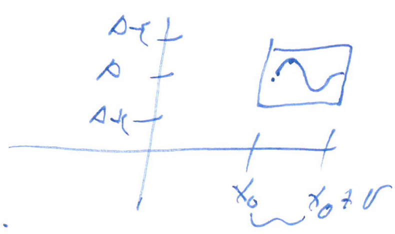
$$\sin x<x<\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\underset{\substack{\Downarrow\\ 1 \text{ ha } x\to 0}}{\cos x}<\frac{\sin x}{x}<1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\left(\text{Ha } \underset{x\approx 0}{x<0} \Rightarrow -x>0 \qquad \frac{\sin x}{x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin(-x)}{-x}\approx 1\right)$

Def Az $f(x)$ fv jobboldali határértéke az A szám, ha $\forall\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta>0$, hogy $x_0<x<x_0+\delta$ esetén

$|f(x)-A|<\varepsilon$



Jelölés: $\lim_{x\to x_0+} f(x)=A$.

Def Az $f(x)$ fv baloldali határértéke a B szám, ha $\forall\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta>0$, hogy $x_0-\delta<x<x_0$ esetén

$|f(x)-B|<\varepsilon$. Jelölés: $\lim_{x\to x_0-} f(x)=B$

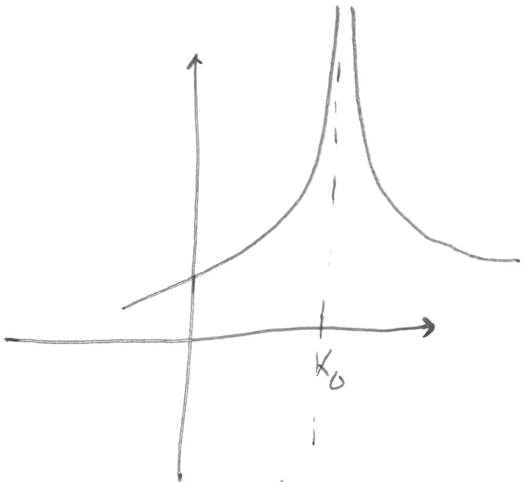
Megj: Az $f(x)$ fv-nek x_0-ban pontosan akkor létezik határértéke, ha létezik bal és jobboldali határértéke és ezek megegyeznek.

Pl. 1. $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$

2. $\lim\limits_{x \to 0+} \{x\} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} \{x\} = 1$

Def Az $f(x)$ fv-nek az x_0 helyen a $+\infty$ a határértéke, ha $\forall K > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy $f(x) > K$ ha $0 < |x - x_0| < \delta$.

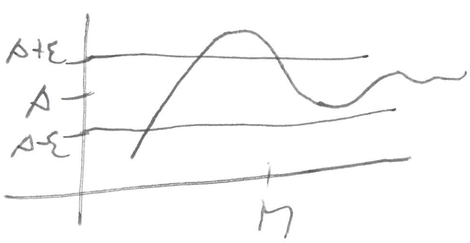
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



Pl. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Def Az $f(x)$ fv $+\infty$-ben vett határértéke a A szám, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik M, hogy $x > M$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$



Pl. 1. $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

2. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

<u>Nevezetes határértékek</u>

1. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

$y = \frac{1}{x}$. Ekkor $x \to \infty \Leftrightarrow y \to 0+$, így

$\lim_{y \to 0+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$.

Megmutatható: $\lim_{y \to 0-} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

$\Bigg\} \Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

Tehát $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1.$

$y = e^x - 1$ esetén $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$

$y + 1 = e^x \Rightarrow x = \ln(1+y)$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{y \cdot \mu \ln(1+x)}{x \ln(1+y)} =$

$y = (1+x)^\mu - 1$ esetén $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$

$1+y = (1+x)^\mu \Rightarrow \ln(1+y) = \mu \ln(1+x)$

$\lim_{x \to 0} \mu \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1+y)}{y}} =$

μ

Folytonosság

Def Az $f(x)$ fv folytonos az x_0 helyen, ha

(1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ határérték

(2) $\exists f(x_0)$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Def Az $f(x)$ fv folytonos, ha az értelmezési tartomány minden pontjában folyt.

Pl. 1. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ folyt

2. $f(x) = \sin x$, $\cos x$, e^x folyt

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$ folyt ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

4.) $f(x) = \ln x$ folyt ha $x > 0$

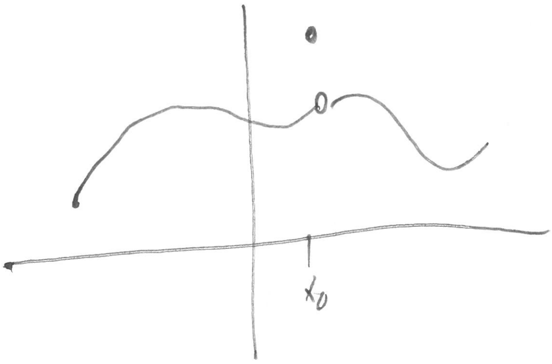
5.) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ folyt ha $x \neq 1$

6.) $f(x) = \sqrt{3x+2}$ folyt ha $x > -\frac{2}{3}$

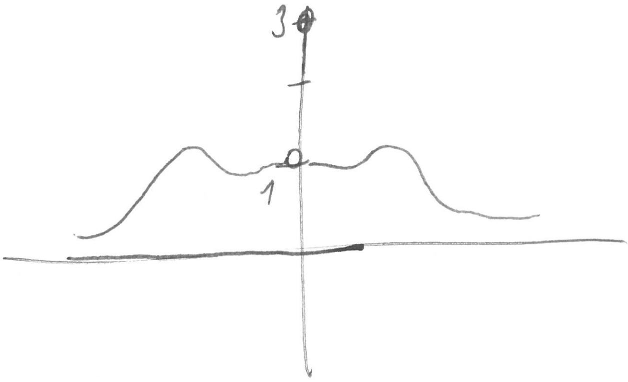
7.) $f(x) = \{x\}$ folyt, ha $x \notin \mathbb{Z}$

Def Az $f(x)$ fonk az x_0-ban megszüntethető szakadása van, ha $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, de $f(x_0)$ nem definiált vagy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Ekkor $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0}$ választással megszüntethetjük a szakadást.

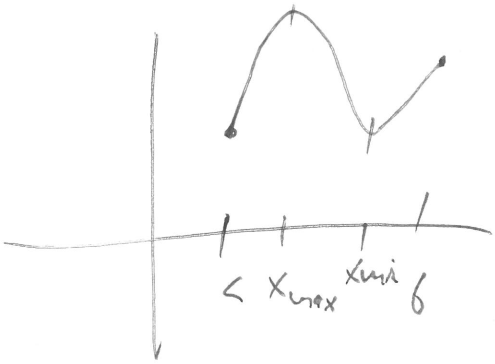


Pl. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{ha } x\neq 0\\ 3 & x=0\end{cases}$



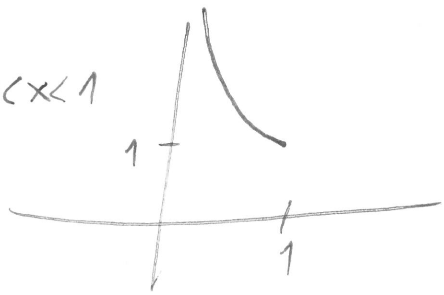
$f(0)=1$ választással megszüntethetjük a szakadást, mert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

<u>Tétel</u> (Weierstrass) Zárt intervallumban folytonos fv korlátos és a fv itt felveszi a legkisebb és legnagyobb értékét.

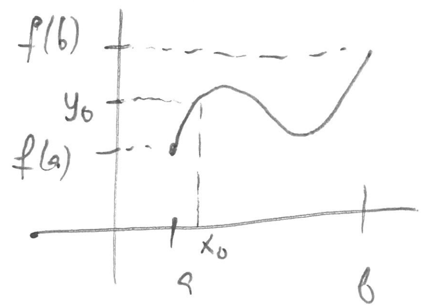


<u>Megj:</u> Ez nyílt intervallumban nem igaz:

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $0<x<1$



Tétel (Bolzano) Ha $f(x)$ folyt az $[a,b]$-ben, akkor $f(x)$ minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a,b]$-ben.



Köv 1. Ha $f(a)$ és $f(b)$ előjele különböző, akkor $f(x)$-nek van gyöke $[a,b]$-ben.

2. Ha $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_{2n+1} > 0$, akkor $p(x)$-nek van gyöke:

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$\lim_{x\to\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^{2n+1}} \Big(\underset{\substack{\vee \\ 0}}{a_{2n+1}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_{2n}}{x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_{2n-1}}{x^2}} + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_1}{x^{2n}}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_0}{x^{2n+1}}} \Big) = +\infty$$

$\Rightarrow \exists\, b:\ p(b) > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{x^{2n+1}} \Big(a_{2n+1} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_{2n}}{x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_{2n-1}}{x^2}} + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_1}{x^{2n}}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_0}{x^{2n+1}}} \Big) = -\infty$$

$\Rightarrow \exists\, a:\ p(a) < 0$

$\overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow}\ \exists\, x_0 \in [a,b]:\ p(x_0) = 0$