

Matematika A2

10. feladatsor megoldása

1. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat!

- (a) $z = 19 - x^2 - y^2$
- (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (c) $x^2 - y^2 = z$
- (d) $x^2 + 4z^2 = 16$
- (e) $z^2 - y^2 = 1$
- (f) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- (g) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$
- (h) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
- (i) $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$
- (j) $y^2 - z^2 = 4$

2. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem!

- (a) $f(x, y) = \sqrt{y-x}$ A függvény értelmezési tartománya azon (x, y) pontpárokból áll, amelyekre $y-x \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: \mathbb{R}^2 kivéve azon pontok, melyekre $y > x$.
Értékészlete:
Szintvonalai: $\sqrt{y-x} = c$, azaz $y = x + c^2$. Azaz a szintvonalai egyenesek, amik az y tengelyt a c^2 pontban metszik.
- (b) $f(x, y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ A függvény értelmezési tartománya azon (x, y) pontpárokból áll, amelyekre $9-x^2-y^2 \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: az origó középpontú három sugarú körlap pontjai.
- (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

3. Határozzuk meg a határértékeket!

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

A határérték kiszámításakor felhasználtuk, hogy a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$

A függvény a megadott pontban folytonos, így a határérték egyszerű behelyettesítéssel számolható. A fenti határérték: $\cos 0 = 1$.

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); x \neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x-2}\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0); 2x-y \neq 4} \frac{\sqrt{2x-y-2}}{2x-y-4}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0); 2x-y \neq 4} \frac{\sqrt{2x-y-2}}{2x-y-4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0); 2x-y \neq 4} \frac{2x-y-4}{2x-y-4(\sqrt{2x-y}+2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0); 2x-y \neq 4} \frac{1}{\sqrt{2x-y}+2}$$

A határérték kiszámolásakor gyöktelenítettük a számlálót, így már ki tudtuk számolni a határértéket.

4. Az (x, y) -sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?

(a) $f(x, y) = \sin(x + y)$

A megadott függvény folytonos függvények összetétele, nincs olyan tartomány, ahol nem értelmezett. Azaz ez a függvény a teljes valós síkon folytonos.
Folytonossági pontok: \mathbb{R}^2 .

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ A megadott függvény folytonos függvények összetétele, a teljes valós síkon értelmezett. Azaz ezen függvény folytonossági pontjai: \mathbb{R}^2 .

5. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ esetén!

(a) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$

Közelítsünk a megadot pontba $y = mx^2$ parabolák mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{1}{1 + m^2}$$

Azaz látható, hogy különböző m értékekere különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$

Közelítsünk a megadot pontba $y = mx$ különböző meredekségű egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{|mx^2|} = \frac{m}{|m|}$$

Azaz látható, hogy különböző m értékekere különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

(c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ Közelítsünk a megadot pontba $y = mx$ különböző meredekségű egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-m)}{x(1+m)} = \frac{1-m}{1+m}$$

Azaz látható, hogy különböző m értékekere különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

6. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

$$f_x = 2x - y$$

$$f_y = -x + 2y$$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(c) $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

$$f_x = y \ln ye^{xy}$$

$$f_y = -\frac{e^{xy}}{y} + x \ln ye^{xy}$$

(d) $f(x, y) = \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

$$f_x = \frac{1}{x \ln y}$$

$$f_y = -\frac{\ln x}{y \ln^2 y}$$

7. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat!

(a) $f(x, y) = x^2 y + \cos y + y \sin x$

$$f_x = 2xy + y \cos x$$

$$f_y = x^2 - \sin y + \sin x$$

$$f_{xx} = 2y - y \sin x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x + \cos x$$

$$f_{yy} = -\cos y$$

(b) $f(x, y) = \ln(x + y)$

$$f_x = f_y = \frac{1}{x + y}$$

$$f_{xx}(f_{xy} = f_{yx} = f_{yy}) = -\frac{1}{(x + y)^2}$$

8. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben f_{xy} -t: először x -szerint vagy először y -szerint?

(a) $f(x, y) = x \sin y + e^y$

Először x szerint kell deriválnunk, ugyanis ekkor csak az első tag marad meg, amit könnyű utána y szerint lederiválni.

(b) $f(x, y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$

Először y szerint kell deriválni, ugyanis ekkor csak a második tag marad. És azt utána könnyű x szerint deriválni.

(c) $f(x, y) = x \ln xy$ Először y szerint deriválunk, majd x szerint.

9. Mutassuk meg, hogy az $f(x, y)$ függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

Laplace-egyenletnek! (14.3: 65, 66)

(a) $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

$$f_x = -2e^{-2y} \sin 2x$$

$$f_{xx} = -4e^{-2y} \cos 2x$$

$$f_y = -2e^{-2y} \cos 2x$$

$$f_{yy} = 4e^{-2y} \cos 2x$$

Látható, hogy ezek alapján tényleg teljesül a fenti állítás. Azaz

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $D = \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$ tartományon.

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_{xx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_{yy} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

Kisebb számolás után látható, hogy itt is teljesül a fenti állítás. Azaz

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

10. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

(a) $f(x, y) = y - x$, $P_0(2, 1)$

$$\text{grad}f = (f_x, f_y) = (-1, 1)$$

Azaz ezen függvény gradiense minden pontban: $(-1, 1)$

(b) $f(x, y) = y - x^2$, $P_0(-1, 0)$

$$\text{grad}f = (f_x, f_y) = (-2x, 1)$$

Azaz ezen függvény gradiense a megadott P_0 pontban: $(2, 1)$.

11. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, \mathbf{A} irányában!
A függvény iránymenti deriváltját a következő módon számoljuk: $\langle \text{grad}f, \mathbf{A} \rangle$.

(a) $f(x, y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(2, 1)$, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$$\text{grad}f = (2y, 2x - 6y), \quad f_x(P_0) = (2, -2)$$

Azaz az iránymenti derivált értéke: $8 - 6 = 2$.

(b) $f(x, y, z) = xy + e^{x-y}$, $P_0(1, 1)$, $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

$$\text{grad}f = (y + e^{x-y}, x - e^{x-y}), \quad f_x(P_0) = (2, 0)$$

Azaz az iránymenti derivált értéke: $24 - 0 = 24$.

12. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott P_0 pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P_0(1, 1)$

(b) $f(x, y) = x + y + xy$, $P_0(0, 0)$