

Matematika A2

3. feladatsor

Fourier-sorok

Emlékeztető: Az $f(x)$ 2π szerint periodikus függvény Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad \text{ha } k=1,2,\dots$$

Az $f(x)$ T szerint periodikus függvény Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{2k\pi}{T}x + b_k \sin \frac{2k\pi}{T}x),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx,$$
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2k\pi}{T}x dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2k\pi}{T}x dx, \quad \text{ha } k=1,2,\dots$$

1. Keresse meg az alábbi 2π szerint periodikus $f(x)$ függvények Fourier-sorát.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = |\sin x|$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = (\pi - |x|)^2, \quad \text{ha } |x| < \pi$$

(e)

$$f(x) = x^2, \quad \text{ha } |x| < \pi$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

(g) Mennyivel egyenlő az $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ végtelen sor (az előző két feladat alapján)?

2. Keresse meg az alábbi T szerint periodikus $f(x)$ függvények Fourier-sorát.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{ha } 1 < x < 2, \end{cases} \quad T = 1$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases} \quad T = 2$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha } 1 < x < 2, \end{cases} \quad T = 2$$

3. Keresse meg az alábbi 2π szerint periodikus $f(x)$ függvények Fourier-sorát a linearizáló formulák segítségével!

(a) $f(x) = \cos^2 x \sin x$

(b) $f(x) = \sin^2 x + \sin^3 x$

(c) $f(x) = \sin 5x(\sin 6x + \cos 3x)$

(d) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$