Matematika A2

6. gyakorlat

1. Határozza meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak vektorteret a szokásos műveletekkel:
   (a) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a második koordináta 1;
   (b) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a második koordináta 0;
   (c) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a koordináták összege 0;
   (d) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol legalább az egyik koordináta 0;
   (e) azon 2×2-es valós mátrixok, ahol a főátlóban 0-k vannak;
   (f) 2×2-es valós, szimmetrikus mátrixok;
   (g) azon 2×2-es valós mátrixok, melyekben nincs 0.
   (h) a harmadfokú valós együtthatós polinomok;
   (i) a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok;
   (j) azon legfeljebb harmadfokú polinomok, ahol $f(1) = 2$;
   (k) azon legfeljebb harmadfokú polinomok, ahol $f(1) = 0$;
   (l) a legfeljebb harmadfokú polinomok között lévő páros polinomok.

2. Az előző feladatban ahol vektorteret kapunk határozzuk meg egy bázisát!

3. Döntse el, hogy az alábbi halmazok $\mathbb{R}^3$-ben, lineárisan függetlenek, generátorrendszert alkotnak, bázist alkotnak-e!
   (a) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 3, 1)$
   (b) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 3, -1)$, $v_3 = (5, -1, -1)$
   (c) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 3, -1)$, $v_3 = (2, 5, 2)$
   (d) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 3, -1)$, $v_3 = (1, 0, 0)$

4. (a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{v_1} = (0, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v_2} = (6, 0, 5, 1)$, és $\mathbf{v_3} = (4, -7, 1, 3)$ lineárisan függő rendszert alkotnak R^4-ben.
   (b) Fejezzük ki mindegyik vektort a másik kettő lineáris kombinációjaként!

5. Mutassuk meg, hogy az alábbi halmaz bázist alkot M_{22}-ben!

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az R^3 alábbi altereinek a bázisait!
   (a) A $3x - 2y + 5z = 0$ egyenletű sík
   (b) Az $x - y = 0$ egyenletű sík
   (c) Az $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$ egyenes
   (d) Az (a, b, c) alakú vektorok, ahol $b = a + c$

7. Keressük meg egy bázisát az R^4 megadott vektorai által kifeszített alterének.
   (a) $(1, 1, -4, -3)$, $(2, 0, 2, -2)$, $(2, -1, 3, 2)$

(b) $(-1, 1, -2, 0)$, $(3, 3, 6, 0)$, $(9, 0, 0, 3)$

(c) $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(-2, 0, 2, 2)$, $(0, -3, 0, 3)$

8. Határozzuk meg, hogy a **b** vektor benne van-e az A mátrix oszlopvektorai által kifeszített térben! Ha benne van, akkor fejezzük ki **b**-t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként!

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$