3. gyakorlat - Fourier-sorok

2009. március 13.

1. Keresse meg az alábbi 2π szerint periódikus f(x) függvények Fourier-sorát!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{ha} \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0 \pi \cos x \mathrm{d}x = \ldots = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \cos nx = \ldots =$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos x}{2}, & \text{ha} \quad n = 1 \\ 0, & egybknt \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin nx = \ldots = \frac{1}{\pi} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1}$$

A fenti integrálok kétféle módon számolható ki. A trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb, könnyen integrálható alakra hozhatóak, vagy parciális integrálással számolhatóak. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $b_n = 0 \forall$ páratlan n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \sin nx =$$

$$= \frac{\cos x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2kx$$

(b)

$$f(x) = |\sin x|$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x| \cos nx = \ldots = \frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

A fenti integrál kétféle módon számolható ki. A trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb, könnyen integrálható alakra hozható, vagy parciális integrálással számolható. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páratlan n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos nx =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2kx$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \qquad \forall k = 0, 1, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx = \ldots = \frac{1}{2\pi n}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

(d)

$$f(x) = (\pi - |x|)^2, \text{ha} x \le \pi$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \qquad \forall k = 0, 1, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)^2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |x|)^2 \cos nx = \ldots = \frac{4}{n^2}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos nx}{n^2}$$

(e)

$$f(x) = x^2, \text{ha} \, |x| \leq \pi$$

Az f(x) függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \qquad \forall k = 0, 1, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx = \ldots = \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \cos nx}{n^2}$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi - x \mathrm{d}x = \ldots = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - x) \cos nx \mathrm{d}x = \ldots = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - x) \sin nx \mathrm{d}x = \ldots =$$

A fenti integrálok kétféle módon számolható ki. A trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb, könnyen integrálható alakra hozhatóak, vagy parciális integrálással számolhatóak. A b_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $b_n = 0 \forall$ páros n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{???(1 - (-1)^n)}{n^2} \cos nx =$$

(g) Mennyivel egyenló a kövekező végtelen sor (az előző két feladat segítségével)?

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

2. Keresse meg az alábbi T szerint periódikus f(x) függvények Fourier-sorát. (T=2 minden feladatban.)

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 x \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos 2n\pi 2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin 2n\pi 2 \mathrm{d}x = \ldots = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páros n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin n\pi x$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 x \mathrm{d}x + \int_1^2 2 - x \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos 2n\pi x 2 \mathrm{d}x + \int_1^2 (2 - x) \cos 2n\pi x 2 \mathrm{d}x = \ldots = 2 \frac{(-1)^n}{-} 1 \pi^2 n^2$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin 2n\pi x 2 \mathrm{d}x + \int_0^1 (2 - x) \sin 2n\pi x 2 \mathrm{d}x = \ldots = 0$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páros n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi x \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos 2n\pi 2 \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin 2n\pi 2 \mathrm{d}x = \ldots =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad n = 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak vagy trigonometrikus azonoságok segítségével egyszerűbb alakra hozhatóak. Az a_n-ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páratlan n-re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\sin \pi x}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{n^2-1} \cos n\pi x =$$

$$= \frac{\sin \pi x}{2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2k\pi x$$

3. Keresse meg az alábbi 2π szerint periódikus f(x) függvények Fourier-sorát a linearizáló formulák segítségével.
   A feladat egyszerűen megoldható, hogy ha ismerjük a következő trigonometrikus azonosságokat:

$$\cos kx \cos lx - \sin kx \sin lx = \cos(k+l)x$$

$$\cos kx \cos lx + \sin kx \sin lx = \cos(k-l)x$$

$$\sin kx \cos lx + \cos kx \sin lx = \sin(k+l)x$$

$$\sin kx \cos lx - \cos kx \sin lx = \sin(k-l)x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

   (a)

$$f(x) = \cos^2 x \sin x$$

$$F(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} \sin x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x - \sin x}{2}\right) = \frac{\sin 3x}{2}$$

(b)

$$f(x) = \sin^2 x \sin^3 x$$

$$F(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} + \sin x \left(\frac{1-\cos 2x}{x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x - \sin x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + \sin x - \frac{\sin 3x}{4}$$

(c)

$$f(x) = \sin 5x(\sin 6x + \cos 3x)$$

$$F(x) = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 11x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{2}$$

(d)

$$f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$$

$$F(x) = \frac{\sin^2 x}{4} \sin x = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$