1. Függvénysorok

1. Bevezetés és definíciók

A végtelen soroknál tanultuk, hogy az

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$$

végtelen összeg $|x| < 1$ esetén konvergens. A fenti végtelen összegre úgy is gondolhatunk, hogy végtelen sok függvényt adunk össze és ezt vizsgáljuk. Ez vezet el a következő fogalomhoz:

1. definíció. Legyenek $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ olyan függvények, amelyek közös értelmezési tartománya I. Ekkor a belőlük képzett függvénysoron az

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots$$

kifejezést értjük, ahol $x \in I$.

Egy konkrét $x_0 \in I$ értéket behelyettesítve a következő végtelen sort kapjuk:

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots.$$

Ez vagy konvergens vagy divergens.

2. definíció. Azon $x_0 \in I$ számok halmazát, amelyekre

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots.$$

konvergens sor, az

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots$$

függvénysor konvergenciatartományának mondjuk.

Példák:

1. Határozza meg az

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots + e^{nx} + \ldots$$

függvénysor konvergenciatartományát!
Megoldás: A fenti függvénysor egy e^x hányadosú mértani sor, ami pontosan akkor konvergens, ha $|e^x| < 1$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $x < 0$, tehát a konvergenciatartomány a negatív számok halmaza.

2. Határozza meg az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n} = \cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^3 x}{3} \cdots + \frac{\cos^n x}{n} + \ldots$$

függvénysor konvergenciatartományát!
Megoldás: A gyökkritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\cos^n x_0}{n}\right|} = |\cos x_0|$$

Ha $|\cos x_0| < 1$, akkor a vizsgált függvénysor abszolút konvergens, tehát konvegens.
Tudjuk, hogy $-1 \le \cos x_0 \le 1$. Külön meg kell vizsgálni a $\cos x_0 = 1$ és a $\cos x_0 = -1$ eseteket.
Ha $\cos x_0 = 1$, akkor a függvénysor a következő végtelen sort adja:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

ami egy divergens sor. A $\cos x_0 = 1$ egyenlet pontosan az $x_0 = 2k\pi$ esetén teljesül (k egész szám).
Ha $\cos x_0 = -1$, akkor a függvénysor a következő alternáló sort adja:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

ami egy konvergens sor a Leibniz-kritérium alapján. A $\cos x_0 = -1$ egyenlet pontosan az $x_0 = \pi + 2k\pi$ esetén teljesül (k egész szám).
Összefoglalva kapjuk, hogy a konvergenciatartomány a valós számok halmaza kivéve a $2k\pi$ alakú számokat.

2. Hatványsorok

Ebben a fejezetben egy speciális, de alkalmazás szempontjából alapvető fontosságú függvénysort tárgyalunk.

3. definíció. Az $x = 0$ hely körüli hatványsornak nevezzük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \ldots$$

alakú függvénysort. Az $x = a$ körüli hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n =$$

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \ldots.$$

Itt az a számot a hatványsor középpontjának, a c_0, c_1, c_2 valós számokat pedig a hatványsor együtthatóinak nevezzük.

Példa

1. Határozza meg az

$$1 - \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{9}(x-3)^2 - + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n (x-3)^n + \ldots$$

hatványsor konvergenciatartományát és adja meg a fenti sor által definiált függvényt a konvergenciatartományban!
Megoldás: A fenti hatványsor egy olyan mértani sor,

amelynek első eleme 1 és hányadosa $-\frac{x-3}{3}$. Ez pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|-\frac{x-3}{3}\right| < 1$$

azaz

$$0 < x < 6.$$

Ekkor az előállított függvény a mértani sor összegképlete szerint:

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)} = \frac{3}{x}.$$

2. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergenciatartományát!
Megoldás: Az x_0 valós szám akkor lesz benne a konvergenciatartományban, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$$

végtelen sor konvergens. Alkalmazzuk a hányados kritériumot a konvergencia eldöntésére:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x_0^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_0}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

ezért minden valós x_0 esetén konvergens sort kapunk, tehát a konvergenciatartomány a valós számok halmaza.

3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ hatványsor konvergenciaratományát!
Megoldás: Az x_0 valós szám akkor lesz benne a konvergenciatartományban, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x_0^n$$

végtelen sor konvergens. Alkalmazzuk a gyökkritériumot a konvergencia eldöntésére:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x_0^n|} = \lim_{n\to\infty} |n x_0| = +\infty,$$

ha $x_0 \neq 0$, ezért minden $x_0 \neq 0$ esetén divergens sort kapunk, tehát a konvergenciatartomány a $\{0\}$ halmaz.

Az alábbiakban azt mutatjuk meg, hogy néz ki egy konvergenciatartomány és hogyan lehet egyszerűen meghatározni azt.

1. tétel (Hatványsorok konvergenciatétele)**.** 1. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergens valamely $x = c \neq 0$ szám esetén, akkor abszolút konvergens minden x esetén, ha $|x| < |c|$.

2. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor divergens valamely $x = d$ szám esetén, akkor divergens minden x esetén, ha $|x| > |d|$.

Bizonyítás:

1. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ konvergens, akkor tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0,$$

ezért létezik N egész, hogy $n \geq N$ esetén

$$|a_n c^n| < 1,$$

azaz

$$|a_n| < \frac{1}{|c|^n}.$$

Innen kapjuk, hogy ha $|x| < |c|$, akkor $n \geq N$ esetén

$$|a_n x^n| < \left|\frac{x}{c}\right|^n.$$

Ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |x|^n$ végtelen sorból formált s_n részletösszegre felső becslés (feltehető, hogy $n \geq N$):

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_{N-1} x^{N-1}| +$$
$$|a_N x^N| + |a_{N+1} x^{N+1}| + \cdots + |a_n x^n| \leq$$
$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_{N-1} x^{N-1}| +$$
$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \ldots$$

konvergens végtelen sor.

2. Ha valamely x esetén $|x| > |d|$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergens lenne, akkor a Tétel első (már bizonyított fele) szerint $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n$ is konvergens lenne, ami ellentmondás. ■

A fenti tétel alapján már könnyű leírni a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciatartományát: Ha létezik olyan $c \neq 0$ valós szám, amelyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ konvergens végtelen sor és létezik d valós szám, amelyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n$ divergens végtelen sor, akkor R-rel jelölve a

$$\{|c| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n \quad \text{konvergens}\}$$

halmaz legkisebb felső korlátját kapjuk, hogy olyan x-re, amelyre $|x| < R$ a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergens lesz, mivel R definíciója szerint van olyan c valós szám, amelyre $|x| < |c| < R$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ konvergens végtelen sor, de ekkor az előző tétel 1. szerint $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is konvergens lesz.
Másrészt, ha valamely d valós szám esetén $|x| > R$, akkor R definíciója miatt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergens lesz.

Ha nem létezik olyan $c \neq 0$, amelyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ konvergens, akkor ez azt jelenti, hogy a konvergenciatartomány a $\{0\}$ halmaz; míg ha olyan d nem létezik, amelyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n$ divergens, akkor a konvergenciatartomány a valós számok halmaza.

Összefoglalva és most már a középpontú hatványsorokra kimondva kapjuk, hogy:

2. tétel. A
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$
hatványsor konvergenciatartománya következőképpen nézhet ki:

1. Létezik $R > 0$, hogy ha $|x-a| < R$, akkor konvergens a hatványsor, míg ha $|x-a| > R$, akkor konvergens. Külön kell meggondolni az $x = a \pm R$ számok esetén a konvergenciát; eszerint a konvergenciatartomány egy nyílt vagy félig nyílt, félig zárt vagy egy zárt intervallum lehet.
2. A sor csak az $x = a$ esetén konvergens, egyébként divergens.
3. A sor minden valós szám esetén konvergens.

A fenti tételben szereplő R-et konvergenciasugárnak hívjuk. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, akkor a konvergenciasugarat könnyű meghatározni:

3. tétel. 1. Ha létezik a $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ harérérték, akkor
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, akkor a konvergenciatartomány a valós számok halmaza.
3. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, akkor a konvergenciatartomány az $\{a\}$, azaz a hatványsor csak $x = a$ esetén konvergens.

Bizonyítás: Csak 1.-et bizonyítjuk: Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-a)^n$ konvergens, akkor
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x_0-a|^n} = |x_0-a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1,$$
azaz
$$|x_0-a| \leq \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$
Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-a)^n$ divergens, akkor
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x_0-a|^n} = |x_0-a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1,$$
azaz
$$|x_0-a| \geq \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$
Innen kapjuk, hogy
$$|x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
esetén konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ végetelen sor, míg ha
$$|x-a| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$
akkor divergens. Ez mutatja, hogy a konvergenciasugár
$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad \blacksquare$$

Megjegyzés: Az előző tétel mintájára meg lehet mutatni, hogy
$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$
ha ez a határérték létezik (végtelen is lehet).

Összefoglalva: A
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$
hatványsor konvergenciatartományának meghatározása a következőképpen történik:

Kiszámoljuk a R konvergenciasugarat:
$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
Ez alapján

1. ha $R = 0$, akkor a konvergenciartamány a $\{a\}$ halmaz, azaz csak $x = a$-ban konvergens a sor;
2. ha $R = +\infty$, akkor a konvergenciartamány a valós számok halmaza (mindenütt konvergens a hatványsor);
3. ha R pozitív valós szám, akkor a hatványsor konvergens az
$$]a-R, a+R[$$
nyílt intervallumban és divergens a
$$]-\infty, a-R[\text{ és }]a+R, \infty[$$
nyílt félegyeneseken. Az $x = a - R$ pontról a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ végtelen sor konvergenciája, míg az $x = a + R$ pontról a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ végtelen sor konvergenciája dönt.

Példa: Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

hatványsor konvergenciatartományát!

Megoldás: Nyilván a középpont $a = 0$ és az együtthatók $a_n = \frac{1}{n}$. Emiatt

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1,$$

ezért a hatványsor konvergens a $]-1,1[$ nyílt intervallumban és divergens a $]-\infty,-1[$ és $]1,\infty[$ félegyeneseken.

Ha $x = 1$, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

harmonikus sort kapjuk, amiről tudjuk, hogy divergens.

Ha $x = -1$, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + - \dots$$

alternáló sort kapjuk, ami a Leibniz-kritérium alapján konvergens.

Így a konvergenciatartomány a $[-1,1[$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

A következő tétel azt mondja, hogy egy hatványsor által megadott függvény deriválása és integrálása a hatványsor tagjainak deriválását és integrálását jelenti.

4. tétel. 1. Ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

hatványsor $a - R < x < a + R$ esetén konvergens, akkor meghatároz egy $]a-R, a+r[$ nyílt intervallumon lévő $f(x)$ függvényt, amelyre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

Ennek a függvénynek minden n-re létezik a deriváltja, amit az eredeti sor tagjainak deriválásával kapunk meg:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

stb.

2. A $]a-R, a+R[$ nyílt intervallumon a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

hatványsor szintén konvergens lesz és minden $a-R < x < a+R$ egyenlőtlenségnek eleget tevő x esetén

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Példa: $f(x) = arctgx$ hatványsora:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \dots,$$

ezért

$$\int f'(x)dx = \int 1 - x^2 + x^4 - + \dots dx$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots + C,$$

de

$$0 = arctg0 = 0 - \frac{0^3}{3} + - \dots + C = C,$$

így

$$arctx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots,$$

ha $|x^2| < 1$, azaz $-1 < x < 1$.

3. Taylor-sorok

Az $f(x)$ függvényt akarjuk hatványsorként felírni, azaz rögzített a mellett olyan a_n-eket keresünk, amelyekre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n =$$

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Tegyük fel, hogy $f(x)$ végtelen sokszor differenciálható az a egy környezetében. Ekkor

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x-a)^{n-3}$$

stb. Behelyettesítve a-t kapjuk, hogy

$$f(a) = a_0$$

$$f'(a) = a_1$$
$$f''(a) = 1 \cdot 2a_2$$
$$f'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3$$

és általában
$$f^{(n)}(a) = n!a_n,$$

azaz
$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

4. definíció. Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelyik végtelen sokszor differenciálható egy olyan intervallumban, amelynek belső pontja a. Az $f(x)$ függvény által generált Taylor-sor az $x = a$ helyen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$
$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$
$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots .$$

Az $f(x)$ függvény által generált Maclaurin-sor az $x = 0$ helyen vett Taylor-sor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k =$$
$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots .$$

Példa: Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény $a = 2$-beli Taylor-sorát!

Megoldás: Nyilván

$$f'(x) = -x^{-2}$$
$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

és általában
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}.$$

Ezért
$$\frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n n! 2^{-(n+1)}}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}},$$
tehát a Taylor-sor:
$$\frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + - \dots ,$$
ami egy egy $\frac{1}{2}$ első tagú, $-\frac{x-2}{2}$ hányadosú mértani sor. Ez nyilván megfelelő, mivel
$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{1}{x},$$
és ez akkor teljesül, ha
$$\left| -\frac{x-2}{2} \right| < 1,$$
azaz
$$0 < x < 4.$$

A következőkben arra keressük a választ, hogy a Taylor-sor mikor állítja elő a függvényt. Ehhez az 1. félévben tanult Taylor-tétel nyújtja az alapot:

5. tétel (Taylor-tétel)**.** Ha az $f(x)$ függvény az $a \in I$ intervallumon akárhányszor differenciálható, akkor minden n pozitív egész és $x \in A$ esetén

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$
ahol
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
egy a és x közötti c-vel.

Példa: Bizonyítsuk be, hogy minden valós x esetén

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Megoldás: Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát! Ekkor

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1,$$

ezért a Taylor-tétel szerint

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$
ahol
$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^n$$
egy 0 és x közötti c-vel.

Ezért, ha $x < 0$, akkor

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to 0, \text{ ha } n \to \infty$$

Ha $x > 0$, akkor

$$|R_n(x)| \le e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Ezért tetszőleges valós x esetén

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

ahonnan már következik az állítás.

Következmény: Ha $x = 1$ az előző példában, akkor azt kapjuk, hogy

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

A fenti gondolatmenetből adódó állítás a következő tételben fogalmazható meg:

6. tétel. Ha létezik M konstans, amellyel x és a közötti valamennyi t esetén

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M,$$

akkor a Taylor-tételben szereplő $R_n(x)$ maradéktag kielégíti az

$$|R_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

egyenlőtlenséget. Amennyiben ez a feltétel teljesül minden n-re, akkor $f(x)$ Taylor-sora $f(x)$-et állítja elő.

Példa:

1. Minden valós x esetén

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - + \dots .$$

Megoldás: Legyen

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1$$

stb. Innen a Taylor sor:

$$x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - + \dots .$$

Mivel

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \sin x \text{ vagy } \pm \cos x,$$

ezért

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq 1,$$

ami bizonyítja az állítást.

2. Hasonlóan bebiznyítható, hogy minden valós x esetén

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + - \dots ,$$

de úgyanez következik abból is, hogy

$$(\sin x)' = \cos x$$

és

$$(x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - + \dots)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - + \dots ,$$

3. A $\cos x$ Taylor-sorából, már a $\cos 2x$ Taylor-sorát könnyű meghatározni, csak a $\cos x$ Taylor-sorában az x-et $2x$-re kell cserélni:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + - \dots$$

4. Határozzuk meg az $f(x) = (1+x)^m$ Taylor-sorát, ahol m valós szám.

Megoldás: Könnyen igazolható, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

ezért

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1),$$

ahonnan a Taylor sor

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots +$$

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots .$$

Ha m nemnegatív egész, akkor a Taylor-sor $m+1$ darab nemnulla tagot tartalmaz és binomiális tételt kapjuk vissza.

Ha m nem nemnegatív egész, akkor végtelen sok tagja van a Taylor-sornak. Igazolható, hogy $|x| < 1$ esetén konvergens a sor és előállítja $(1+x)^m$-et.

Alkalmazások:

1. Határozza meg 10^{-3} pontossággal az $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ határozott integrált!

Megoldás: Az e^x Taylor sorából kapjuk, hogy

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - + \dots ,$$

ezért

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + - \dots dx =$$

$$[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}-\frac{x^{11}}{1320}+-\dots]_0^1 =$$
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+-\dots,$$

ahonnan kapjuk, hogy egy megfelelő közelítés a

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}.$$

(Valójában a hibát pontosan meg kellene becsülni de ez a következő két tagra ránézve hihető.)

2. Határozza meg a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

határértéket!

Megoldás: Mivel

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots\right)-x}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^4}{7!}+-\dots = -\frac{1}{6}.$$