Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Matematika A2 vizsga megoldása Név:

2013. június 11., 9-11., Építőmérnöki BSc szak Neptun kód:

Az utolsó három feladatból összesen el kell érni 30%-ot!

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $f(x, y)$ függvény y-szerinti parciális deriváltját az (x_0, y_0) helyen!

   Megoldás: Az $f(x, y)$ függvény y-szerinti parciális deriváltját az (x_0, y_0) helyen a következő határérték definiálja:
   $$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$
   Szavakkal elmondva az y-szerinti parciális derivált az (x_0, y_0) helyen a következő: rögzített x_0 mellett az $f(x_0, y)$ y-változós függvény deriváltja az y_0-ban.

   (b) *(3 pont)* Hol y-szerint parciálisan deriválható az $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ függvény?

   Megoldás: A megadott függvény a $(0, 0)$-ban nincs értelmezve, így ott biztos nem létezik az y-szerinti parciális deriváltja. Minden egyéb (x_0, y_0) helyen létezik az y-szerinti parciális derivált, hiszen ha $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, akkor az első változó rögzítése mellett kialakuló $f(x_0, y)$ egyváltozós függvény deriválható y_0-ban, a derivált itt $f'_y(x_0, y_0) = \frac{1(x_0^2+y_0^2)-2y_0(x_0+y_0)}{(x_0^2+y_0^2)^2}$.

2. (a) *(3 pont)* Legyen V egy vektortér. Mikor mondjuk, hogy a $W \subset V$ halmaz altere V-nek?

   Megoldás: Egy V vektortér a $W \subset V$ részhalmaz definíció szerint akkor altér ha ő maga is vektortér a V vektortér összeadására és skalárral való szorzására nézve. Szerencsére nem kell a vektortér összes tulajdonságát leellenőrizni. Egy előadáson tanult tétel szerint $W \subset V$ pontosan akkor altér ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, vagyis két tetszőleges W-beli vektor összege és tetszőleges W-beli vektor tetszőleges skalárszorosa is W-ben van.

   (b) *(4 pont)* Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben azok a vektorok, amelyek legalább egyik koordinátája 0?

   Megoldás: $\mathbb{R}^3$-nek az a W részhalmaza, amely azokat a vektorokat tartalmazza amelyeknek legalább az egyik koordinátája 0 nem alkot alteret, mert például az $(1, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok W-ben vannak de az összegük $(1, 1, 1)$ nincs W-ben.

3. *(7 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be az alternáló végtelen sorra vonatkozó Leibniz-kritériumot!

Megoldás: Legyen $a_n > 0$ és nézzük az $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ alternáló sort. A Leibnitz-kritérium azt mondja ki, hogy ha a_n monoton csökken és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor az előbbi alternáló sor konvergens.

A bizonyítás a következő:

Legyen s_m a fenti alternáló sor első m tagjának az összege. Akkor konvergens az alternáló sor (mint minden sor), ha a részletösszegekből álló s_m sorozat konvergens. Először vizsgáljuk meg az s_m sorozat páros sorszámú elemei által alkotott s_{2m} részsorozatot. Ennek elemei a következőképpen írhatóak:

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Vegyük észre, hogy mivel a_n monoton csökken, ezért a fenti kifejezés minden zárójele külön-külön pozitív. Ez mutatja, hogy s_{2m} részsorozat monoton növekszik. A következő átírás is fontos:

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m}) - a_{2m}.$$

Amiből az a_n monoton csökkenése és $a_n > 0$ miatt az következik, hogy $s_{2m} \le a_1$. Összességében azt kaptuk, hogy az s_{2m} részsorozat monoton növekszik és felülről korlátos, vagyis konvergens (előző féléves tétel szerint). Már csak azt kell belátni, hogy az s_{2m+1} páratlan sorszámú elemek alkotta részsorozat is konvergens és ugyanoda tart ahova a páros sorszámú elemek s_{2m} részsorozata. Ez pedig adódik a következő átírásból és onnan, hogy az a_n sorozat (és így persze a_{n+1} is) 0-hoz tart ahogy $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2m} + a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2m} + \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2m}.$$

4. *(7 pont)* Határozza meg $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x \le 0 \\ x & \text{ha } 0 < x \le \pi \end{cases}$ 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorának első négy nemnulla tagját!

Megoldás: A függvény a képlet szerint $(-\pi, 0]$-ban 0 míg $(0, \pi]$-ben x. Ezt kell aztán kiterjeszteni a teljes számegyenesre a 2π periódikusságot kihasználva (megjegyzem, hogy gyakori hiba, hogy ezt a kiterjesztést rosszul végzitek el, így például nem veszitek észre, hogy $(\pi, 2\pi]$-ben 0 a függvény). A függvény felrajzolása után érdemes végiggondolni, hogy nem-e páros vagy páratlan a függvény, mert ha igen, akkor kevesebbet kell számolnunk. Most sajnos egyik sem igaz, ezért definíció szerint számolunk. Kihasználva, hogy a 0 szakaszokon 0 az integrál adódik:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\cos(kx)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - 0 = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

A fenti képlet tömören kifejezi, hogy a páros indexű a_k együtthatók 0-k. Így az

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

Fourier sor első 4 nemnulla tagja a következő:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2\cos(x)}{\pi} + \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2}.$$

5. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

(a) *(4 pont)* Határozza meg az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait!

Megoldás: Először a mátrix sajátértékeit számoljuk, amik a $\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right)$ karakterisztikus polinom gyökei. A karakterisztikus polinom (a determinánst a harmadik sor szerint kifejtve számoljuk):

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right).$$

Szorzat akkor 0 ha valamelyik tényezője 0, így a karakterisztikus polinom gyökei $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (kétszeres gyök), $\lambda_3 = 3$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $\left(\underline{\underline{A}} - 1 \cdot \underline{\underline{I}}\right) \underline{v} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Egész pontosan a megoldások egy alteret alkotnak, aminek egy bázisát szeretnénk kijelölni. Az említett egyenletrendszer Gauss eliminációja a következő:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Amiből az összes megoldás az $\{(-s, s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$ alakú vektorok (a második és harmadik oszlopban nincs vezéregyes így a hozzájuk kapcsolódó változók szabad paraméterek, míg a v_1 kifejezése adódik az egyenletből). Ebben az altérben bázist alkotnak az $(1, -1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok (tömören azt mondhatjuk, hogy ezek az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok).

A $\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $\left(\underline{\underline{A}} - 3 \cdot \underline{\underline{I}}\right) \underline{v} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Az említett egyenletrendszer Gauss eliminációja a következő:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Amiből az összes megoldás az $\{(s, s, 0), s \in \mathbb{R}\}$ alakú vektorok. Ebben az altérben bázist alkot az $(1, 1, 0)$ vektor (tömören azt mondhatjuk, hogy ez a 3 sajátértékhez tartozó sajátvektor).

Összefoglalva az 1 kétszeres sajátérték $(1, -1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ sajátvektorokkal (megjegyzem, hogy előfordulhatott volna, hogy annak ellenére, hogy a sajátérték kétszeres multiplicitású csak egy sajátvektor tartozik hozzá, más szóval a sajátaltér csak egydimenziós), míg a 3 egyszeres sajátérték $(1, 1, 0)$ sajátvektorral.

(b) *(3 pont)* Diagonalizálja az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot (azaz határozza meg azt a $\underline{\underline{D}}$ diagonális mátrixot és $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrixot, melyre $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}}$)

Megoldás: Egy négyzetes mátrixot pontosan akkor tudunk diagonizálni, ha találunk oszlopszám darab független sajátvektort. Ilyenkor ezeket oszlopba rakva adódik a $\underline{\underline{P}}$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A diagonizáló egyenlethez szükséges ennek a mátrixnak az inverze (ami ha találtunk elég független sajátvektort akkor biztosan létezik), amit vagy az adjungált mátrixos képlettel vagy a következő Gauss-eliminációs képlettel lehet kiszámolni (úgy eliminálunk, hogy a baloldalon alakuljon ki az egységmátrix, ekkor a jobboldalról az inverz leolvasható):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ezzel figyelembe véve azt, hogy milyen sorrendben pakoltuk be a sajátvektorokat $\underline{\underline{P}}$-be az $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{AP}}$ diagonizáló egyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megjegyzem, hogy az invertálást elkerüljük ha ortonormált rendszerként (páronként merőleges egységhosszú vektorok) vesszük fel a sajátvektorokat (ha szimmetrikus a mátrix, akkor ez mindig megtehető). A kritikus résznél, vagyis a kétszeres sajátértéknél "véletlenül" sikerült merőleges bázist választani, így a 3 kiválasztott sajátvektor merőleges egymásra, így ha az eredeti sajátvekorok helyett az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(0, 0, 1)$ sajátvektorokkal képezzük az $\underline{\underline{P}}$ mátrixot, akkor az invertálást megoldhattuk volna transzponálással is, vagyis a sorok és oszlopok felcserélésével. Én ha lehet ezt a megoldást javaslom.

6. *(6 pont)* Határozza meg a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid azon pontját, ahol az érintősík párhuzamos a $2x + 2y + z = 3$ síkkal!

   Megoldás: Két sík pontosan akkor párhuzamos, ha a normálvektoraik párhuzamosak. Az $2x+2y+z = 3$ sík normálvektora a $(2, 2, 1)$ vektor. Így keressük a sík azon pontjait, ahol a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid érintősikjának normálvektora párhuzamos a $(2, 2, 1)$ vektorral. Az érintősík normálvektora az (x, y) pontban $(f'_x(x, y), f'_y(x, y), -1)$ ami jelen esetben $(2x, 2y, -1)$. Utóbbi pontosan akkor párhuzamos a $(2, 2, 1)$ vektorral ha $(x, y) = (-1, -1)$. Így ez a keresett pont.

7. *(6 pont)* Határozza meg az $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 5$ függvény szélsőértékeit!

   Megoldás: Lokális szélsőértékeket keresünk (globális szélsőérték meghatározásához végtelenbe vett határértéket is figyelembe kellene vennünk, amivel most nem foglalkozunk). A függvény mindenütt deriválható, ezért ott lehet lokális szélsőérték ahol a parciális deriváltak 0-k, vagyis azon pontokban ahol

   $$f'_x(x, y) = 4x - 2y + 4 = 0 \text{ és } f'_y(x, y) = 2y - 2x - 2 = 0.$$

   A fenti most lineáris egyenletrendszernek a $(-1, 0)$ pont az egyetlen megoldása. Így itt lehet csak lokális szélsőérték. Abban, hogy eldöntsük tényleg van-e, és ha van akkor milyen lokális szélsőérték a második deriváltakból álló Hesse-mátrix segít:

   $$H(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A Hesse mátrix most konstans, így a $(-1,0)$ pontban a fenti mátrix. Ennek a determinánsa $4\cdot 2 - (-2)\cdot(-2) = 4 > 0$ továbbá a bal felső sarokban is pozitív szám áll, így megállapíthatjuk, hogy lokális minimuma van a függvénynek a $(-1,0)$ pontban.

8. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y) = x^2$ függvény kettős integrálját a $T = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 100, x > 0\}$ tartományon!

Megoldás: T a 10 sugarú origó középpontú körlapnak az y-tengelytől jobbra eső része. Emiatt érdemes polárkoordinátás helyettesítést csinálnunk. Azaz $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, míg a Jacobi-mátrix determinánsának abszolútértéke: r. A feladat szövege alapján felírhatóak a határok: $0 \leq r \leq 10$, $\frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Így a kettősintegrál:

$$\int\int_T x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{10} r^2\cos^2(\varphi)\cdot r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2500\cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1250(1+\cos(2\varphi))\,\mathrm{d}\varphi = 1250\pi + 1250\left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1250\pi.$$

9. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y,z) = x$ függvény hármasintegrálját az $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ és $D(0,0,1)$ csúcsú tetraéderen! (Segítség: a B, C és D pontokon átmenő sík egyenlete: $x+y+z=1$)

Megoldás: Normáltartományon kell integrálni, amely a határok megfelelő felvételével könnyen elvégezhető. A lenti levezetés több helyen kihasználja, hogy konstans függvény egyváltozós integrálja a konstans megszorozva az integrált intervallum hosszával.

$$\int\int\int_T x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{1-x} x(1-x) - xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x(1-x)(1-x) - x\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x - 2x^2 + x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{24}.$$