

# Matematika A2

## 13. feladatsor

1. Térjünk át polárkoordinátákra, és számítsuk ki az integrált!

$$(a) \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$$

$$(c) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx$$

$$(b) \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$$

$$(d) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

2. Határozza meg a  $T$  tartományon az  $f(x, y)$  függvény kettős integrálját, ha

$$(a) T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}, f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$(b) T = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$(c) T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}, f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$$

$$(d) T = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}, f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$(e) T = \{(x, y) | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}, f(x, y) = |2xy|$$

3. Áttérés polárkoordinátákra: Számítsuk ki az

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$$

integrált!

4. Integrálja az  $f(x, y) = 1$  függvényt az  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $xy = 1$  és  $xy = 2$  görbék által határolt tartományra!

5. Legyen  $T$  egy tartomány az  $xy$ -sík első síknegyedében, amelyet az  $xy = 1$ ,  $xy = 9$  hiperbolák és az  $y = x$ ,  $y = 4x$  egyenesek határolnak. Használjuk az  $x = u/v$ ,  $y = uv$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$  transzformációt az

$$\iint_T \left( \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

integrál átírásához egy megfelelő  $G$  tartományra az  $uv$ -síkon! Számítsuk ki az integrált!

6. Határozza meg az  $f(x, y) = x$  függvény integrálját a  $T = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$  tartományra!

7. Határozza meg az  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $xy = 1$  és  $xy = 2$  görbék által határolt síkidom területét!

8. Határozza meg a  $z = 1 - x^2 - 2y^2$  felület  $z \geq 0$  része és az  $x, y$  sík által határolt térrész térfogatát!

9. Határozza meg az  $f(x, y) = xy$ ,  $T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$  felület felszínét!

10. Határozza meg az  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  felület  $xy$  sík feletti részének felszínét!

11. Határozza meg a  $T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$  tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit.

12. Határozza meg a  $T = \{(x, y) | x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit.

13. Számítsuk ki a következő hármastintegrálokat!

$$(a) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

$$(b) \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_0^{8-x^2-y^2} dz dy dx$$

$$(c) \int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} dx dy dz$$

$$(d) \int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz dy dx$$

$$(e) \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi y \sin z dx dy dz$$

$$(f) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x + y + z) dy dx dz$$

$$(g) \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz dy dx$$

$$(h) \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz dx dy$$

$$(i) \int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz dy dx$$

$$(j) \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{4-x^2-y} x dz dy dx$$

$$(k) \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(u + v + w) du dv dw$$

$$(l) \int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln r \ln s \ln t dt dr ds$$

$$(m) \int_0^{\pi/4} \int_0^{-\ln \cos v} \int_{-\infty}^{2t} e^x dx dt dv$$

$$(n) \int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1} dp dq dr$$