

1. gyakorlat - Végtelen sorok

2016. március 2.

1. Határozza meg az alábbi végtelen sorok összegét!

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} - e^n}{e^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{1}{e - 1} - \frac{1}{e^2 - 1} = \frac{e}{e^2 - 1}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2}$$

Az (a) és (b) feladatban a geometriai sor összegképletét kellett használni, míg a (c) részben előbb parciális törtekre bontottunk, majd kihasználtuk az így kapott összeg teleszkópikus voltát.

2. Állapítsuk meg a gyök és hányadoskritériumot használva, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek és melyek divergensek!

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$$

A konvergencia eldöntésére hányadoskritériumot használunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^{n+1}3^n}{3^{n+1}n2^n} \rightarrow \frac{2}{3}$$

A kapott hányados értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2009^n}{n^{2009}}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2009^n}{n^{2009}}} = \frac{2009}{\sqrt[n]{n^{2009}}} \rightarrow 2009$$

A kapott n-dik gyök értéke 1-től nagyobb, tehát a végtelen sorunk divergens.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \rightarrow e^{-3}$$

A kapott n-dik gyök értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

(d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + 6^n}{3^n + 7^n}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk, de előbb egy becslést hajtunk végre a könnyebb számoláshoz.

$$\frac{2^n + 6^n}{3^n + 7^n} \leq \frac{6^n + 6^n}{7^n}$$

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{2\left(\frac{6}{7}\right)^n} = \sqrt[n]{2} \frac{6}{7} \rightarrow \frac{6}{7}$$

A kapott n-dik gyök értéke 1-től kisebb, tehát sorunkat sikerült felülről becsülni egy konvergens sorral, tehát a majoráns kritérium alapján az eredeti sorunk is konvergens.

(e)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

A konvergencia eldöntésére hányadoskritériumot használunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0$$

A kapott hányados gyök értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

A konvergencia eldöntésére hányadoskritériumot használunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow e^{-1}$$

A kapott hányados gyök értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

3. Mely "a" esetén konvergens a következő sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right)$$

Megoldás: Csak az $a = 1$ esetén konvergens.

4. Az alább megadott végtelen sorok közül melyek konvergens, és melyek divergens?

(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

A konvergencia eldöntésére majoráns kritériumot használunk.

$$\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így a majoránskritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

A konvergencia eldöntésére integrálkritériumot használunk. Minden $x \geq 2$ esetén az $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln \ln x]_2^{\infty} = \infty$$

A sor tehát az integrálkritérium alapján divergens.

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

A konvergencia eldöntésére integrálkritériumot használunk. Minden $x \geq 2$ esetén az $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő (ez egyszerű deriválással látható).

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = [-(\ln x)^{-1}]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

A sor tehát az integrálkritérium alapján konvergens.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

A konvergencia eldöntésére minoráns kritériumot használunk.

$$\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium alapján az eredeti sor is divergens.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 4}$$

A konvergencia eldöntésére majoráns kritériumot használunk.

$$\frac{1}{n^2 + 2n + 4} \leq \frac{1}{n^2}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így a majoránskritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 4}$$

A konvergencia eldöntésére majoráns kritériumot használunk. $n \geq 2$ esetén

$$\frac{1}{n^3 - 4} \leq \frac{1}{n^3 - \frac{n^3}{2}} = \frac{2}{n^3}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ sor konvergens, így a majoránskritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

A kapott n -dik gyök értéke 1-től kisebb, tehát a gyökkritérium alapján az eredeti sor konvergens.

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

A feladat megoldása kétféle módon történhet. A konvergencia eldöntésére minoráns kritériumot használunk. $n \geq 3$ esetén

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így a minoránskritérium alapján az eredeti sor is divergens.

VAGY A konvergencia eldöntésére integrálkritériumot használunk. $x \geq e$ esetén az $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő (ez egyszerű deriválással látható).

$$\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_2^{\infty} = \infty$$

A sor tehát az integrálkritérium alapján divergens.

(i)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$

A konvergencia eldöntésére minoráns kritériumot használunk. $n \geq 2$ esetén

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \geq \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így a minoránskritérium alapján az eredeti sor is divergens.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Ez a sor Leibniz típusú, hisz az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens.

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$$

A sor nem Leibniz típusú, ugyanis az általános tag abszolút értékben nem tart monoton csökkenőleg a 0-hoz.

$$|a_n| \rightarrow 1$$

Azaz nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így az eredeti sor divergens.

(I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Gyöktelenítéssel a sor a következő alakra hozható:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Ez pedig már egy Leibniz típusú sor, ugyanis az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 1-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a sor konvergens.

5. Az alábbi sorok közül melyek az abszolút konvergens, feltételesen konvergens, illetve divergens?

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 0.1^n$$

Ez a sor Leibniz típusú, ugyanis az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens. Ha abszolút konvergenciát vizsgálunk, akkor egy 1-től kisebb hányadosú geometriai sort kapunk, ami szintén konvergens. Így a feladatbeli sor abszolút konvergens.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{5+n}$$

Ez a sor is Leibniz típusú, hisz az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens. Ha abszolút konvergenciát vizsgálunk, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n}$ sorral minorálható a sorunk, ami divergens. Így a feladatbeli sor nem abszolút, csak feltételesen konvergens.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 4}$$

Ez a sor is Leibniz típusú, hisz az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens. Ha abszolút konvergenciát vizsgálunk, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorral majorálható a sorunk. Így a feladatbeli sor abszolút konvergens.