1. Hármas Integrál

1. Bevezetés és definíciók

A bevezetés első részében egy feladaton keresztül jutunk el a hármasintegrál definíciójához.

Feladat:

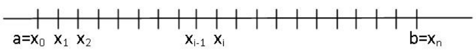
Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ korlátos test, és a D testnek legyen az $f(x, y, z) \geq 0$ folytonos függvény a sűrűségfüggvénye. Számoljuk ki a D test tömegét!

Megoldás:

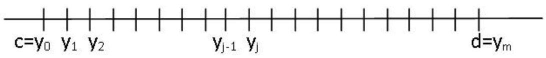
Mivel D korlátos test, emiatt $\exists\ a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$, hogy $(x, y, z) \in D$ esetben:

$a \leq x \leq b$,
$c \leq y \leq d$,
$f \leq z \leq g$.

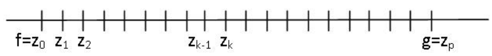
Az $[a, b]$ intervallumot n részre osztjuk:



Az $[c, d]$ intervallumot m részre osztjuk:



Az $[f, g]$ intervallumot p részre osztjuk:



Jelölje ΔV_{ijk} az

$$\{(x, y, z) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq y \leq y_i, \\ z_{i-1} \leq z \leq z_i, x, y, z \in D\}$$

rész térfogatát!

Ha $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ értékek kicsik, akkor tetszőleges

$$(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \delta_{ijk}) \in \{(x, y, z) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ y_{i-1} \leq y \leq y_i, z_{i-1} \leq z \leq z_i, x, y, z \in D\}$$

esetben ennek a kis téglatest D-be eső részének a tömege

$$\approx f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \delta_{ijk}) \Delta V_{ijk}$$

Így az egész D test tömege:

$$\approx \sum_{i,j,k} f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \delta_{ijk}) \Delta V_{ijk}$$

1. definíció (Hármas Integrál)**.** Az $f(x, y, z)$ függvény hármas integrálható a $D \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományon, ha létezik a

$$\lim_{\substack{n,m,p \to \infty \\ max\{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k\} \to 0}} \sum_{i,j,k} f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \delta_{ijk}) \Delta V_{ijk}$$

határérték.

Jelölés:
$\iiint\limits_D f(x, y, z) dV$ vagy $\iiint\limits_D f(x, y, z) dxdydz$

Megjegyzés:

Ha $f(x, y, z) \geq 0$, akkor $\iiint\limits_D f(x, y, z) dV$ a D test tömegét számolja ki, ahol $f(x, y, z)$ a test sűrűségét jelenti.

1. tétel (Hármasintegrál létezése)**.** Ha $f(x, y, z)$ folytonos és korlátos függvény, valamint $D \subseteq \mathbb{R}^3$ korlátos tartomány, akkor létezik az $\iiint\limits_D f(x, y, z) dV$.

Kiszámítás:

1.1. Téglatest tartományon

Legyen $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, f \leq z \leq g\}$, ekkor

$$\iiint\limits_D f(x, y, z) dV =$$

$$\int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{z=f}^{g} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{z=f}^{g} \left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy = \dots$$

(hatféle variációs lehetőség van)

Példák:

1. Legyen adva egy téglatest tartomány, és egy rajta értelmezett függvény a következőképpen:

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3, \\ D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 6\}$$

Ekkor a következő módokon tudjuk kiszámolni az integrált:

$$\iiint\limits_D xy^2 z^3 dxdydz =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \left(\int\limits_{y=0}^{3} \left(\int\limits_{z=2}^{6} xy^2 z^3 dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \left(\int\limits_{y=0}^{3} \left[xy^2 \frac{z^4}{4} \right]_2^{z=6} dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{2} \Big(\int_{y=0}^{3} xy^2 \cdot 324 - xy^2 \cdot 4dy \Big) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{2} \Big(\int_{y=0}^{3} xy^2 \cdot 320dy \Big) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{2} \Big[320 \cdot x \frac{y^3}{3} \Big]_0^{y=3} dx = \int_{x=0}^{2} 2880 \cdot xdx =$$

$$= \Big[1440 \cdot x^2 \Big]_0^{x=2} = 5760.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk ha a 6 lehetséges sorrend közül másikat választunk az integráláshoz: (az eljárás azonos, de nagyobb léptékű)

$$\iiint_D xy^2 z^3 dxdydz =$$

$$= \int_{z=2}^{6} \Big(\int_{y=0}^{3} \Big(\int_{x=0}^{2} xy^2 z^3 dx \Big) dy \Big) dz =$$

$$= \int_{z=2}^{6} \Big(\int_{y=0}^{3} \Big[\frac{x^2}{2} y^2 z^3 \Big]_0^{x=2} dy \Big) dz =$$

$$= \int_{z=2}^{6} \Big(\int_{y=0}^{3} 2 \cdot y^2 z^3 dy \Big) dz =$$

$$= \int_{z=2}^{6} \Big[2 \cdot \frac{y^3}{3} z^3 \Big]_0^{y=3} dz =$$

$$= \int_{z=2}^{6} 18 \cdot z^3 dz = \Big[18 \cdot \frac{z^4}{4} \Big]_2^{z=6} = 5760.$$

2. Most nézzünk egy másik függvényt és egy másik tartományt:

$$f(x,y,z) = e^{x+y+z},$$
$$D = \{(x,y,z) : -1 \leq x,y,z \leq 1.$$

$$\iiint_D e^{x+y+z} dxdydz =$$

$$= \iiint_D e^{x+y+z} dzdydx =$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \Big(\int_{y=-1}^{1} \Big(\int_{z=-1}^{1} e^{x+y+z} dz \Big) dy \Big) dx =$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \Big(\int_{y=-1}^{1} \Big[e^{x+y+z} \Big]_{-1}^{z=1} dy \Big) dx =$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \Big(\int_{y=-1}^{1} e^{x+y+1} - e^{x+y-1} dy \Big) dx =$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \Big[e^{x+y+1} - e^{x+y-1} \Big]_{-1}^{y=1} dx =$$

$$= \int_{x=-1}^{1} e^{x+2} - e^{x} - (e^{x} - e^{x-2}) dx =$$

$$= \int_{x=-1}^{1} e^{x+2} - 2 \cdot e^{x} + e^{x-2} dx =$$

$$= \Big[e^{x+2} - 2 \cdot e^{x} + e^{x-2} \Big]_{-1}^{x=1} =$$

$$= e^3 - 2 \cdot e^1 + e^1 - (e^1 - 2 \cdot e^{-1} + e^{-3}) =$$
$$= e^3 - 3 \cdot e^{+} 3 \cdot e^{-1} - e^{-3}.$$

1.2. Normáltartományon

$$D = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x),$$
$$h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$$

$$\iiint_D f(x,y,z) dV =$$

$$\int_{x=a}^{b} \Big(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \Big(\int_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) dz \Big) dy \Big) dx$$

Vagy attól függően, hogy kapjuk a tartományunkat:

$$D = \{(x,y,z) : a \leq z \leq b, g_1(z) \leq y \leq g_2(z),$$
$$h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)\}$$

$$\iiint_D f(x,y,z) dV =$$

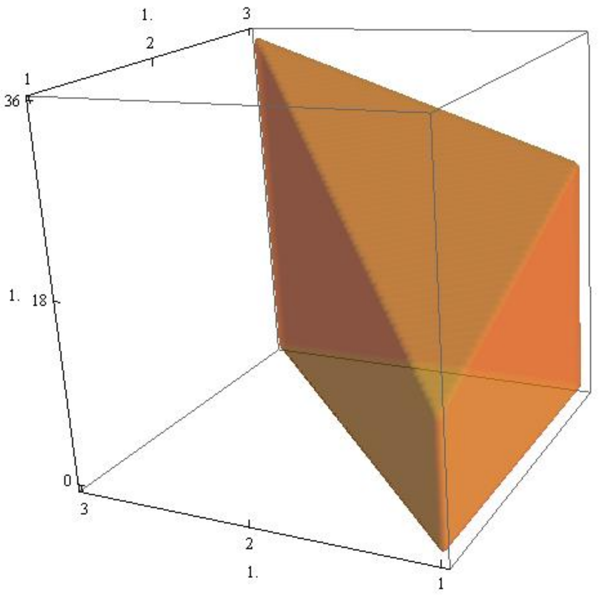
$$\int_{z=a}^{b} \Big(\int_{y=g_1(z)}^{g_2(z)} \Big(\int_{z=h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z) dx \Big) dy \Big) dz$$

(Természetesen itt is összesen 6 kombinációs lehetőségünk van.)

Példa:

Legyen adott a következő tartomány:

$$D = \{(x, y, z) : 1 \leq y \leq 3, \\ y \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 6x + 6y\}$$



Számoljuk ki D térfogatát!

Megoldás:

Tárfogatszámolásnál $f(x, y, z) = 1$ -et veszünk az integrálba!

$$\iiint\limits_D 1dxdydz =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big(\int\limits_{x=y}^{3} \Big(\int\limits_{z=0}^{6x+6y} 1dz \Big) dx \Big) dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big(\int\limits_{x=y}^{3} 6x + 6ydx \Big) dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big[3x^2 + 6y \Big]_{y}^{x=3} dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} 27 + 18y - (3y^2 + 6y^2) dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} 27 + 18y - 9y^2 dy =$$

$$= \Big[27y + 18\frac{y^2}{2} - 9\frac{y^3}{3} \Big]_{1}^{y=3} =$$

$$= 81 + 81 - 81 - (27 + 9 - 3) = 42.$$

Tételezzük fel, hogy a tartomány a következő sűrűséggel rendelkezik: $f(x, y, z) = xyz$.
Számoljuk ki a tömegét!

Megoldás:

$$\iiint\limits_D xyzdxdydz =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big(\int\limits_{x=y}^{3} \Big(\int\limits_{z=0}^{6x+6y} xyzdz \Big) dx \Big) dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big(\int\limits_{x=y}^{3} \Big[xy\frac{z^2}{2} \Big]_{0}^{z=6x+6y} dx \Big) dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big(\int\limits_{x=y}^{3} \frac{xy}{2}(6x + 6y)^2 dx \Big) dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big(\int\limits_{x=y}^{3} 18x^3y + 36x^2y^2 + 18xy^3 dx \Big) dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} \Big[18\frac{x^4}{4}y + 36\frac{x^3}{3}y^2 + 18\frac{x^2}{2}y^3 \Big]_{y}^{x=3} dy =$$

$$= \int\limits_{y=1}^{3} 364,5y + 324y^2 + 81y^3 - 25,5y^5 dy =$$

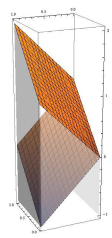
$$= \Big[364,5\frac{y^2}{2} + 324\frac{y^3}{3} + 81\frac{y^4}{4} - 25,5\frac{y^6}{6} \Big]_{1}^{y=3} =$$

$$= 364,5 \cdot \frac{9}{2} + 324 \cdot \frac{27}{3} + 81 \cdot \frac{81}{4} - 25,5 \cdot \frac{3^6}{6} - \\ -(\frac{364,5}{2} + \frac{324}{3} + \frac{81}{4} - \frac{25,5}{6}) = 2792.$$

Feladat:

1. Tekintsük a következő két sík meghatározott része közé eső részt, valamint a hozzá tartozó sűrűségfüggvényt:

$$z = x + y,$$
$$z = x - y,$$
$$0 \leq x, y \leq 1,$$
$$f(x, y, z) = x + y$$



Határozzuk meg a tömegét!

2. Határozzuk meg a csúcsaival adott tetraéder tömegét, ha csúcsai és sűrűsége a következők:

$$A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), D(0, 0, 2)$$
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

1.3. Mérnöki alkalmazás:

$M = \iiint\limits_D f(x,y,z)dV$ (tömeg)

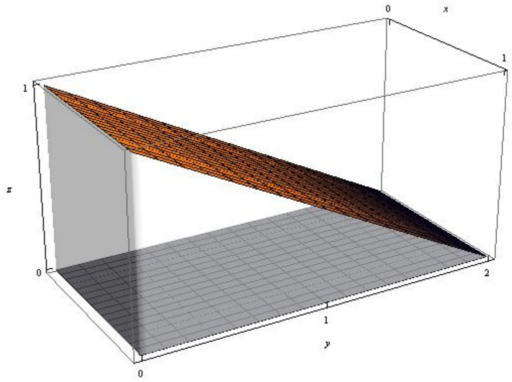
Statikai nyomatékok a koordinátatengelyekre vonatkozóan:

$$M_{yz} = \iiint\limits_D x \cdot f(x,y,z)dV$$
$$M_{xz} = \iiint\limits_D y \cdot f(x,y,z)dV$$
$$M_{xy} = \iiint\limits_D z \cdot f(x,y,z)dV$$

Tömegközéppont: $\left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$

Feladat:

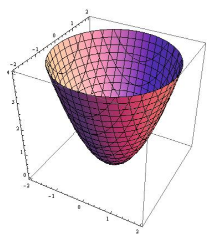
Határozza meg az alábbi homogén ék tömegközéppontját!



Példa:

Határozzuk meg a következő két felület közötti rész súlypontját, ha a sűrűsége C:

$$z = x^2 + y^2,$$
$$z = 4,$$
$$f(x,y,z) = C$$



Észre kell vegyük, hogy ez egy z tengely körüli forgás test, így $s_x = 0$, $s_y = 0$, $s_z = \frac{M_{xy}}{M}$ a fent tanult módon.

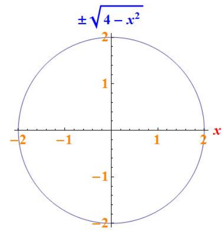
A másik dolog amit érdemes észrevenni, hogy mivel mind a *tömeg*, mind a *nyomaték* tartalmazza az integráljában a sűrűségfüggvényt, ami most konstans C, így az kiemelhető, és egyszerüsíthetünk vele. Jelen helyzetben elég $f(x,y,z) = 1$ -re elvégezni az integrálásokat.

Még egy apróságot meg kell jegyezni, nevezetesen azt, hogy az integrálás során egy eddig nem használt módszert alkalmazunk majd, amit a példa végén tárgyalunk részletesebben.

$$M = \int\limits_{x=-2}^{2} \left(\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int\limits_{z=x^2+y^2}^{4} 1dz \right) dy \right) dx =$$
$$= \int\limits_{x=-2}^{2} \left(\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 4 - (x^2+y^2)dy \right) dx =$$

Elvégezzük a következő helyettesítést:

$$x = r \cdot \cos(\varphi),$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi),$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le r \le 2$$



Kapjuk hogy:

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int\limits_{r=0}^{2} (4-r^2)rdr \right) d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^{r=2} d\varphi =$$
$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 4d\varphi = \left[4\varphi \right]_0^{\varphi=2\pi} = 8\pi$$

Itt szintén észre kellett venni, hogy miután elvégeztük a helyettesítést az integrálon belüli rész még meg lett szorozva egy r-rel. Hogy ez miért történt így a következő részben fog kiderülni. Addig is számoljuk ki a nyomatékot is hasonló módszerrel:

$$M_{xy} = \int\limits_{x=-2}^{2} \left(\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int\limits_{z=x^2+y^2}^{4} zdz \right) dy \right) dx =$$
$$= \int\limits_{x=-2}^{2} \left(\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=x^2+y^2}^{4} dy \right) dx =$$
$$= \int\limits_{x=-2}^{2} \left(\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 8 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} dy \right) dx =$$

Megint elvégezzük az előbbi helyettesítést:

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \Big(\int\limits_{r=0}^{2} (8 - \frac{r^4}{2}) r dr \Big) d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[4r^2 - \frac{r^6}{12} \right]_0^{r=2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 16 - \frac{64}{12} d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{32}{3} d\varphi = \left[\frac{32}{3} \varphi \right]_0^{\varphi=2\pi} = \frac{64}{3}\pi$$

Innen már könnyen adódik, hogy:

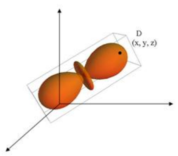
$$s_z = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{64}{3}\pi}{8\pi} = \frac{8}{3}$$

$$s = \Big(0, 0, \frac{8}{3} \Big)$$

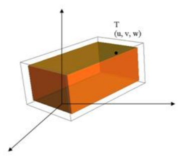
Megjegyzés:

Láttuk, hogy az előbbi feladatban a tömeg és a nyomaték kiszámolásához is egy új módszert kellett használnunk, mégpedig a *Helyettesítés* módszerét. Ennek részletes tárgyalása következik most. Előbb megnézzük általánosan mi is a helyettesítés, hogyan alakul át az integrálunk. Majd speciális tipusú helyettesítési eseteket veszünk. Nevezetesen megnézzük a *Hengerkoordinátákra* és a *Gömbkoordinátákra* való áttérést.

1.4. Általánosan a helyettesítés



$$x = x(u, v, w)$$
$$y = y(u, v, w)$$
$$z = z(u, v, w)$$
$$\longrightarrow$$



2. tétel (Helyettesítés hármasintegrálnál)**.**

$$\iiint\limits_D f(x, y, z) dxdydz =$$

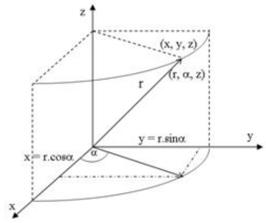
$$\iiint\limits_T f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot$$

$$\cdot |\mathcal{J}(u, v, w)| dudvdw$$

,ahol $\mathcal{J}(u, v, w)$ a *Jacobi*-determinánst jelöli, és a következőképp számoljuk:

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

1.5. Hengerkoordinátás helyettesítés



$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$
$$z = z$$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial (r \cdot \cos(\varphi))}{\partial r} & \frac{\partial (r \cdot \cos(\varphi))}{\partial \varphi} & \frac{\partial (r \cdot \cos(\varphi))}{\partial z} \\ \frac{\partial (r \cdot \sin(\varphi))}{\partial r} & \frac{\partial (r \cdot \sin(\varphi))}{\partial \varphi} & \frac{\partial (r \cdot \sin(\varphi))}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

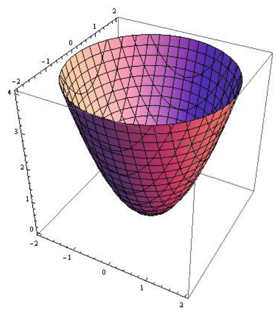
$$= \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{vmatrix} =$$

$$= r \cdot \cos^2(\varphi) - (-r \cdot \sin^2(\varphi)) = r \cdot (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r$$

1. Példa:

Nézzük meg az előző feladatban, hogy alakul a számolás, ha azonnal áttérünk hengerkoordinátákra:

$$x = r \cdot \cos(\varphi),$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi),$$
$$z = z$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$0 \leq r \leq 2$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$
$$f(x, y, z) = C$$



Az, hogy a sűrűség konstans C most se változtat semmin.

$$M = \int\limits_{x=-2}^{2} \Big(\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \Big(\int\limits_{z=x^2+y^2}^{4} 1 dz \Big) dy \Big) dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \Big(\int\limits_{r=0}^{2} \Big(\int\limits_{z=r^2}^{4} r dz \Big) dr \Big) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \Big(\int\limits_{r=0}^{2} (4 - r^2) r dr \Big) d\varphi = \cdots = 8\pi$$

$$M_{xy} = \int\limits_{x=-2}^{2} \Bigg(\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \Bigg(\int\limits_{z=x^2+y^2}^{4} zdz \Bigg) dy \Bigg) dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{2} \Bigg(\int\limits_{z=r^2}^{4} z \cdot rdz \Bigg) dr \Bigg) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{2} \left[\frac{z^2}{2} \cdot r \right]_{r^2}^{z=4} dr \Bigg) d\varphi =$$

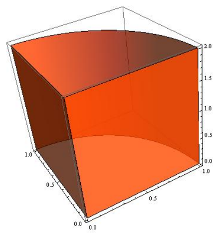
$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{2} (8 - \frac{r^4}{2}) rdr \Bigg) d\varphi = \dots = \frac{64}{3}\pi$$

Szépen látszik, hogy ugyanarra az eredményre jutottunk, hogy: $s = \left(0, 0, \frac{8}{3}\right)$

2. Példa:

Legyen adott a következő tartomány és azon értelmezett sűrűség:

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,$$
$$0 \leq z \leq 2, x, y \geq 0\}$$
$$f(x, y, z) = \frac{z}{1 + x^2 + y^2}$$



Számoljuk ki a test tömegét!

Megoldás:

Először is térjünk át hengerkoordinátákra:

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad 0 \leq r \leq 1$$
$$z = z \qquad 0 \leq z \leq 1$$

$$M = \int\limits_{x=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \Bigg(\int\limits_{z=0}^{2} \frac{z}{1 + x^2 + y^2} dz \Bigg) dy \Bigg) dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{z=0}^{2} \frac{z}{1 + r^2} \cdot rdz \Bigg) dr \Bigg) d\varphi =$$

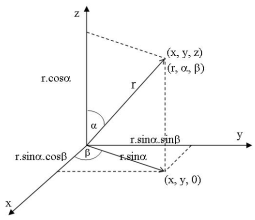
$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{1} \frac{r}{1 + r^2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 dr \Bigg) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{1} \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{1 + r^2} dr \Bigg) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(\int\limits_{r=0}^{1} \frac{1}{4} \cdot \frac{2r}{1 + r^2} dr \Bigg) d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cdot \Big[ln(1 + r^2) \Big]_0^1 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cdot (ln(2) - 0) d\varphi = \frac{1}{4} \cdot ln(2) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot ln(2)}{8}$$

1.6. Gömbikoordinátás helyettesítés



$$x = r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$
$$y = r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$z = r \cdot \cos(\alpha)$$

Új kkordináták jelentése:

- r: origótól való *távolság*
- α: z tengely pozitív felével bezárt szög
- β: xy síkra vett vetítés x tengely poozitív felével bezárt szöge

Jacobi determináns:

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial(r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta))}{\partial r} & \frac{\partial(r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta))}{\partial \alpha} & \frac{\partial(r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta))}{\partial \beta} \\ \frac{\partial(r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta))}{\partial r} & \frac{\partial(r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta))}{\partial \alpha} & \frac{\partial(r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta))}{\partial \beta} \\ \frac{\partial(r \cdot \cos(\alpha))}{\partial r} & \frac{\partial(r \cdot \cos(\alpha))}{\partial \alpha} & \frac{\partial(r \cdot \cos(\alpha))}{\partial \beta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) & r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) & -r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) & r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) & r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) & -r \cdot \sin(\alpha) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos(\alpha) \cdot \begin{vmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) & -r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) & r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \end{vmatrix} -$$

$$-(-r \cdot \sin(\alpha)) \cdot \begin{vmatrix} \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) & -r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) & r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \end{vmatrix} =$$

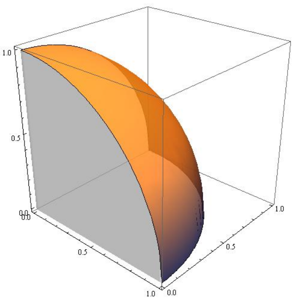
$$= \cos(\alpha)\cdot\left[r^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos^2(\beta)- \right.$$
$$-\left(-r^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin^2(\beta)\right)\Big]+$$
$$+r\sin(\alpha)\cdot\left[r\sin^2(\alpha)\cos^2(\beta)-\right.$$
$$-\left(-r\sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)\right)\Big]=$$
$$=\cos(\alpha)\cdot\left[r^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)\right)\right]+$$
$$+r\sin(\alpha)\cdot\left[r\sin^2(\alpha)\left(\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)\right)\right]=$$
$$=r^2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)+r^2\sin^3(\alpha)=$$
$$=r^2\sin(\alpha)\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right)=$$
$$\boldsymbol{=r^2\sin(\alpha)}$$

Most nézzünk pár példát:

1. Példa:

   Legyen adott a következő tartomány és azon értelmezett sűrűség:

$$D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y\ge 0\}$$
$$f(x,y,z)=xy$$



Számoljuk ki a test tömegét!

Megoldás:

Először is térjünk át gömbi koordinátákra:

$$x=r\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \qquad 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$$
$$y=r\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \qquad 0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$$
$$z=r\cdot\cos(\alpha) \qquad 0\le r\le 1$$

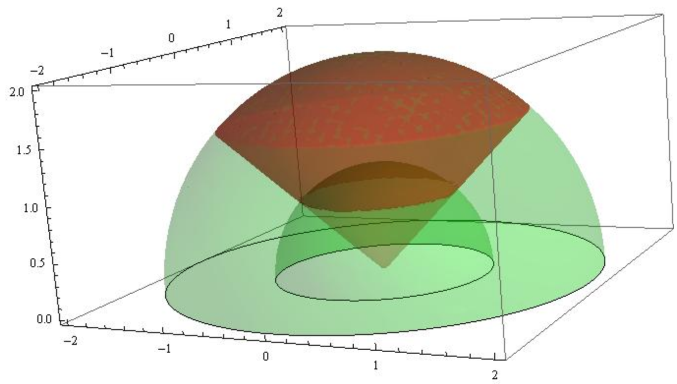
$$M=\int\limits_{x=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int\limits_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xy\,dz\right)dy\right)dx=$$
$$=\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{r=0}^{1} r\sin(\alpha)\cos(\beta)\cdot r\sin(\alpha)\sin(\beta)\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot r^2\cdot\sin(\alpha)dr\right)d\beta\right)d\alpha=$$

$$=\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{r=0}^{1} r^4\sin^3(\alpha)\frac{\sin(2\beta)}{2}dr\right)d\beta\right)d\alpha=$$
$$=\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}\sin^3(\alpha)\frac{\sin(2\beta)}{2}d\beta\right)d\alpha=$$
$$=\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}\sin^3(\alpha)\left[\frac{-\cos(2\beta)}{4}\right]_0^{\beta=\frac{\pi}{2}}d\alpha=$$
$$=\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{10}\sin(\alpha)\cdot\left(1-\cos^2(\alpha)\right)d\alpha=$$
$$=\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{10}\sin(\alpha)+\frac{1}{10}\left(-\sin(\alpha)\right)\cos^2(\alpha)d\alpha=$$
$$=\left[\frac{-1}{10}\cos(\alpha)+\frac{1}{10}\frac{\cos^3(\alpha)}{3}\right]_0^{\alpha=\frac{\pi}{2}}=$$
$$=0-0-\left(\frac{-1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{15}$$

2. Példa:

   Legyen adott a következő tartomány és azon értelmezett sűrűség:

$$D=\{(x,y,z):1\ge x^2+y^2+z^2\ge 4, z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$$
$$f(x,y,z)=z$$



Számoljuk ki a test tömegét!

Megoldás:

Először is térjünk át gömbi koordinátákra:

$$x=r\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \qquad 0\le\alpha\le 2\pi$$
$$y=r\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \qquad 0\le\beta\le\frac{\pi}{4}$$
$$z=r\cdot\cos(\alpha) \qquad 1\le r\le 2$$

$$M = \iiint\limits_D z\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{4}} \Bigg(\int\limits_{\beta=0}^{2\pi} \Bigg(\int\limits_{r=1}^{2} r\cos(\alpha) \cdot r^2 \sin(\alpha) dr \Bigg) d\beta \Bigg) d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{4}} \Bigg(\int\limits_{\beta=0}^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \frac{\sin(2\alpha)}{2} d\beta \Bigg) d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{4}} \Big[\beta\Big]_0^{2\pi} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{2} d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{4}} 2\pi \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{2} d\alpha =$$

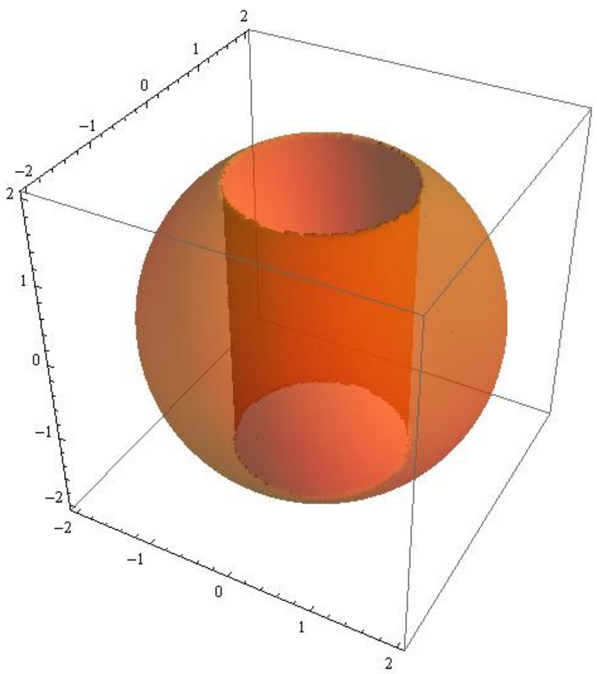
$$= \left[\frac{15\pi}{2} \cdot \frac{-\cos(2\alpha)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{15\pi}{2} \cdot \left(-\frac{0}{4} - \frac{-1}{4}\right) = \frac{15\pi}{8}$$

3. Példa:

Legyen adott a következő tartomány és azon értelmezett sűrűség:

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$$
$$f(x, y, z) = 1$$

A gömböt a z tengely mentén átfúrjuk egy 1 sugarú (henger alakú) fúróval. Mi lesz a maradék rész térfogata?



$V_{\text{maradék}} = V_{\text{gömb}} - V_{\text{henger}}$.