

1. Determinánsok

1. Bevezetés és definíció

Oldjuk meg az alábbi kétismeretlenes, két egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Szorozzuk meg az első egyenletet a_{22} -vel és a másodikat a_{12} -vel:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= b_1a_{22} \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 &= b_2a_{12}, \end{aligned}$$

majd vonjuk ki az első egyenletből a másodikat:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

azaz

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Hasonlóan:

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Ha az alábbi három ismeretlenes egyenletrendszert tekintjük:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Ekkor egy hasonló, de lényegesen hosszabb számolás adja:

$$x_1 = \frac{p}{q},$$

ahol

$$\begin{aligned} p &= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - \\ &\quad - b_3a_{13}a_{22} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} q &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Hasonló képlet adható x_2 , x_3 -ra.

Próbáljuk megérteni a nevezőket! A kétismeretlenes egyenletrendszerben a kéttagú összegek:

$$a_{11}a_{22}$$

és

$$a_{12}a_{21}$$

A háromismeretlenes egyenletrendszerben a háromtagú összegek:

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}$$

Látjuk, hogy egy szorzatban az indexek első számai az 1, 2 ill. 1, 2, 3, a második számokban pedig az 1, 2 ill. 1, 2, 3 számok összes permutációja jelenik meg. Így természetes azt gondolnunk, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásánál az x_i nevezőjében olyan n tényezősszorzatok jelennek meg, ahol az indexben az első számok: 1, 2, ..., n és a második számokban az 1, 2, ..., n számok összes lehetséges permutációi szerepelnek.

Még meg kell értenünk a szorzatok előjelét. Ehhez az inverziószám fogalmára van szükségünk.

1. definíció. Legyen az 1, 2, ..., n számok egy permutációja $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. Ekkor ebben a permutációban azon párok számát, ahol az előbbre lévő nagyobb mint a hátrébb lévő a permutáció inverziószámának hívjuk. Jelölés: $I(\sigma)$

Például: Két szám esetén:

$$I(1, 2) = 0$$

és

$$I(2, 1) = 1.$$

Három szám esetén:

$$I(1, 2, 3) = 0$$

$$I(2, 3, 1) = 2$$

$$I(3, 1, 2) = 2$$

$$I(3, 2, 1) = 3$$

$$I(1, 3, 2) = 1$$

és

$$I(2, 1, 3) = 1.$$

Látjuk azt, hogy a nevezőken + áll ha

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

esetén $I(\sigma)$ az inverziószám páros szám és – szám, ha az $I(\sigma)$ páratlan, tehát $n = 2$ és 3 esetén az

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

szorzat előjele:

$$(-1)^{I(\sigma)}.$$

Ezek alapján természetes az alábbi definíció:

2. definíció. Egy $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsa:

$$\det \underline{A} = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \dots, n$ összes permutációjára vonatkozik.

Egy másik jelölés:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Példák:

1. Egy 2×2 -es mátrix determinánsát úgy számoljuk ki, hogy a főátlóban lévő elemeket összeszorozzuk és kivonjuk ebből a mellékátlóban lévő elemeket szorzatát:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 26$$

2. Egy 3×3 -as determinánst a legegyszerűbb az ún. Sarrus-szabállyal kiszámolni. Ehhez a 3×3 -as determinánst leírása után ismételjük meg az első két oszlopot és formáljunk az átlósan elhelyezkedő számokból 3-tagú szorzatokat. Ezeket adjuk össze oly módon, hogy a balról, fentről jobbra lefelé elhelyezkedő számok szorzatait $+$ -szal a többieket $-$ -szal vesszük tekintetbe.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - \\ -1 \cdot 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot 6 = 106$$

3. Legyen \underline{A} egy ún. $n \times n$ -es felső háromszögmátrix, azaz olyan mátrix, ahol a főátló alatt 0-k szerepelnek. Ekkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Nézzük meg, hogy ez a szumma milyen nem nulla szorzatokat tartalmaz! Az $a_{n\sigma(n)} \neq 0$ csak akkor lehet, ha $\sigma(n) = n$. A $a_{n\sigma(n-1)} \neq 0$ csak akkor lehet, ha $\sigma(n-1) = n-1$ vagy n . Mivel $\sigma(n) = n$, ezért $\sigma(n-1) = n-1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\sigma(i) = i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Azaz csak

egy összeggel kell számolnunk: az $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ -nel. Mivel az $I(1, 2, \dots, n) = 0$, ezért az előjel $+$ lesz, így

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Az utolsó példa azért jelentős, mert a Gauss-elimináció során minden $n \times n$ -es mátrix ilyen alakra hozható. Így a következőkben azzal foglalkozunk, hogy megértsük, hogy a Gauss-elimináció során alkalmazott sorműveletek milyen hatással vannak a determinánusra.

Példák: Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$\det \underline{A} = 10$$

1. Sorcsere:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10,$$

azaz a determináns a -1 -szeresére változott.

2. $c \neq 0$ -val való szorzás: Szorozzuk meg a második sort 3-mal:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 30,$$

azaz a determináns szintén 3-szorosára nőtt

3. Egy sorhoz adjuk hozzá egy másik sor c -szeresét: Adjuk például az első sorhoz a második sor dupláját:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10,$$

azaz a determináns értéke nem változott.

A fent látott tulajdonságok általában is igazak:

- 1. tétel.** 1. Ha egy $n \times n$ -es mátrixban sorcserét hajtunk végre, akkor a determináns értéke (-1) -gyel szorzódik.
2. Ha egy $n \times n$ -es mátrixban egy sort beszorozunk egy c számmal, akkor a determináns is c -vel szorzódik.
3. Ha egy $n \times n$ -es mátrixban egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor c -szeresét, akkor determináns nem változik.

Példa: Határozza meg az

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

Megoldás: Emeljünk ki 3-at az első sorból:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Adjuk hozzá az első sort a második és negyedik sorhoz és vonjuk ki a harmadik sorból az első sort:

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Cseréljük fel a második és harmadik sort:

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vonjuk ki a harmadik sorból a második sor dupláját:

$$-3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Cseréljük meg a harmadik és negyedik sort:

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Vonjuk ki a negyedik sorból a harmadik sor hatszorosát:

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -21$$

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy a mátrixműveletek a determinánsokkal mit csinálnak. Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$\det \underline{A} = -2, \quad \det \underline{B} = -11$$

Nyilván

$$\det \underline{A}^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 = \det \underline{A},$$

$$\det(\underline{A} + \underline{B}) = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -50 \neq \det \underline{A} + \det \underline{B}$$

$$\det(\underline{AB}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = 22 = \det \underline{A} \det \underline{B},$$

$$\det \underline{A}^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det \underline{A}}$$

A fent látott összefüggések általában is igazak:

2. tétel. Legyen $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ és $\underline{B} = (b_{ij})_{n \times n}$. Ekkor

1. $\det \underline{A}^T = \det \underline{A}$,
2. $\det(\underline{AB}) = \det \underline{A} \det \underline{B}$,
3. ha \underline{A} invertálható, akkor $\det \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}}$

A determináns fogalmával már teljesen le lehet írni azokat a négyzetes mátrixokat, amelyek invertálhatók:

3. tétel. Egy $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $\det \underline{A} \neq 0$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ egy invertálható mátrix. Ekkor létezik \underline{A}^{-1} $n \times n$ -es mátrix, hogy

$$\underline{AA}^{-1} = \underline{I}_n.$$

Ezért

$$1 = \det \underline{I}_n = \det(\underline{AA}^{-1}) = \det \underline{A} \det \underline{A}^{-1},$$

ezért

$$\det \underline{A} \neq 0.$$

Most tegyük fel, hogy $\det \underline{A} \neq 0$. Alkalmazzuk $\det \underline{A}$ -ra a Gauss-Jordan eliminációt. Ekkor az eredmény vagy az \underline{I}_n egységmátrix vagy egy olyan mátrix, amelynek utolsó sorában csupa 0 van. Nézzük meg, hogy a Gauss-Jordan elimináció során alkalmazott lépéseknél a determináns hogyan változik!

Sorcsere-nél a determináns (-1)-szeresre változik; ha egy sort $c \neq 0$ számmal szorzunk, akkor a determináns is c -vel szorozódik és ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor c -szeresét, akkor nem változik a determináns értéke. Ezért ha olyan $n \times n$ -es mátrixból indulunk ki, ahol a determináns nem-nulla, akkor a Gauss-Jordan eliminációval kapott mátrix determinánsa sem nulla. Ezért nem lehet, hogy a fenti \underline{A} mátrix esetén a Gauss-Jordan-elimináció olyan mátrixot eredményezzen, ahol az utolsó sorban 0-k vannak, mert akkor a determináns 0 lenne. Így a Gauss-Jordan elimináció az \underline{I}_n egységmátrixot szolgáltatja, tehát a korábban megismert algoritmussal meghatározhatjuk \underline{A}^{-1} -t, tehát létezik az inverz. ■

A következőkben a determináns egy másik kiszámítási módját mutatjuk be. Az $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsa:

$$\det \underline{A} = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

ezért látjuk, hogy egy rögzített a_{ij} szám olyan szorzatokban szerepel, ahol a tagok abból a mátrixból jönnek, amit

$\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával kapunk. Jelölje ennek determinánsát M_{ij} . Nézzük meg, hogy hogyan számítható ki ez alapján egy 3×3 -as mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Érdemes bevezetni az előjeles aldetermináns fogalmát:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Eszerint

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

Ezt az észrevételt általánosítja a kifejtési tétel:

4. tétel. Legyen $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, jelölje C_{ij} az előjeles aldeterminánsokat. Ekkor minden $1 \leq i \leq n$ esetén

$$\det \underline{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

és minden $1 \leq j \leq n$ esetén

$$\det \underline{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

Az első képletet használatánál azt mondjuk, hogy az i -edik sor szerint fejtjük ki a determinánst, míg a második képletet használva a szóhasználat az, hogy a j -edik oszlop szerint fejtünk ki. Mindig olyan sor vagy oszlop szerint érdemes kifejtetni, amelyik a lehető legtöbb 0-t tartalmazza, mert így a lehető legtöbb olyan szorzat lesz, ahol az egyik tényező 0, tehát ezeket le sem kell írni.

Példa: Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

Megoldás: A második sor szerint érdemes kifejtetni. Ekkor a $(-1)^{i+j}$ előjelet legegyszerűbb az ún. sakkáblaszabály szerint felírni, balodalt felül + jel van, egy sorban felváltva

vannak + és - jelek, és két egymás utáni sorban eggyel elcsusztatva vannak a + és --ok. Eszerint

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) \begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

E két determinánst most megint kifejtjük, mondjuk az első sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0 - 9 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -15.$$

és

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0,$$

így

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15) - 2 \cdot 0 = -45.$$

A kifejtési tétel egy kis módosításával jutunk a ferde kifejtési tételhez:

5. tétel. Legyen $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, jelölje C_{ij} az előjeles aldeterminánsokat. Ekkor minden $1 \leq i \leq n$ és minden $1 \leq j \leq n$ esetén ha $i \neq j$, akkor

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = 0.$$

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel lehetőséget ad arra, hogy invertálható mátrix esetén az inverzet felírjuk. Ehhez szükség van az adjungált mátrix definíciójára:

3. definíció. Az $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix adjungált mátrixát úgy kapjuk, hogy minden komponens helyett vesszük a hozzá tartozó előjeles aldetermináns, majd ezt transzponáljuk (a főállóra tükrözzük). Tömören:

$$\text{adj} \underline{A} = (C_{ji})_{n \times n}$$

6. tétel. Ha $\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ egy invertálható mátrix, akkor

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \text{adj} \underline{A}.$$

Bizonyítás: Az inverz definíciója szerint azt kell megmutatni, hogy

$$\underline{\underline{A}} \left(\frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \text{adj} \underline{\underline{A}} \right) = \underline{\underline{I}}_n,$$

azaz

$$\underline{\underline{A}} \text{adj} \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}}_n = \begin{pmatrix} \det \underline{\underline{A}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \underline{\underline{A}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \det \underline{\underline{A}} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det \underline{\underline{A}} \end{pmatrix}.$$

Vegyük a $\underline{\underline{A}} \text{adj} \underline{\underline{A}}$ szorzatot. A szorzat i -edik sorának és j -edik oszlopának eleme

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det \underline{\underline{A}}, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

a kifejési és ferde kifejtési tétel szerint. Ez bizonyítja a tételt. ■

Példa: Határozza meg az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét!

Megoldás: Könnyen látszik, hogy $M_{11} = 3, M_{12} = -2, M_{21} = 2, M_{22} = 5$, ezért $C_{11} = 3, C_{12} = 2, C_{21} = -2, C_{22} = 5$. Így

$$\text{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\det \underline{\underline{A}} = 19,$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{19} & \frac{-2}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{5}{19} \end{pmatrix}.$$

Végezetül visszatérünk a kiinduló problémára és szeretnénk egy n ismeretlent tartalmazó n egyenletből álló lineáris egyenletrendszert megoldani, most már determinánsokkal. Legyen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerből formált együtthatómátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A változók oszlopvektora:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A konstansok oszlopvektora:

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Az egyenlet az ismert módon, tömören

$$\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$$

alakba írható. Ha $\underline{\underline{A}}$ egy invertálható mátrix, akkor

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b} = \left(\frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \text{adj} \underline{\underline{A}} \right) \underline{b}.$$

Az

$$(\text{adj} \underline{\underline{A}}) \underline{b}$$

szorzat elvégzése a következő adja:

$$\begin{pmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \dots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \dots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \dots + b_nC_{nn} \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \dots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \dots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \dots + b_nC_{nn} \end{pmatrix}.$$

Így

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \dots + b_nC_{nj}}{\det \underline{\underline{A}}}.$$

Végezetül meg kell értenünk a számlálót. Jelölje $\underline{\underline{A}}_j$ azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixban a j -edik oszlopot kicseréljük a \underline{b} oszlopvektorral. Ekkor C'_{ik} -vel jelölve az $\underline{\underline{A}}_j$ aldeteminánsait kapjuk a j -edik oszlop szerint $\underline{\underline{A}}_j$ -t kifejtve, hogy

$$\det \underline{\underline{A}}_j = b_1C'_{1j} + b_2C'_{2j} + \dots + b_nC'_{nj}.$$

Mivel az $\underline{\underline{A}}_j$ és $\underline{\underline{A}}$ csak a j -edik oszlopban különbözik, ezért a j -edik oszlophoz tartozó előjeles aldeteminánsok a két mátrixban megegyeznek, azaz

$$C'_{ij} = C_{ij},$$

ezért

$$\det \underline{\underline{A}}_j = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj},$$

így

$$x_j = \frac{\det \underline{\underline{A}}_j}{\det \underline{\underline{A}}}.$$

A fent levezetett formulát Cramer-szabálynak hívják.

Példa: Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcl} x & & 2z = 6 \\ -3x + 4y + 6z & = & 30 \\ -x - 2y + 3z & = & 8 \end{array}$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

Megoldás: Az együtthatómátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

ennek determinánása:

$$\det \underline{\underline{A}} = 44.$$

A Cramer-szabályban szereplő mátrixok:

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

és az ő determinánásaik:

$$\det \underline{\underline{A}}_1 = -40$$

$$\det \underline{\underline{A}}_2 = 72$$

$$\det \underline{\underline{A}}_3 = 152,$$

így

$$x_1 = \frac{-40}{44}, \quad x_2 = \frac{72}{44}, \quad x_3 = \frac{152}{44}.$$