2. gyakorlat - Hatványsorok és Taylor-sorok

2016. március 3.

1. Adjuk meg az itt szereplő sorok konvergenciasugarát és konvergenciaintervallumát!

   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$$

   A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatároznunk.
   $$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{n+2}} \to 1$$

   Azaz a hatványsor konvergenciasugara 1. Az biztos, hogy a (-1,1) nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.
   $$x = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$$

   A fenti sor divergens, mivel nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele (az általános tag 0-hoz tartása).
   $$x = -1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$$

   Az előzőhöz hasonlóan ez a sor is divergens lesz, hisz itt sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Tehát a konvergenciasugár 1, a konvergenciaintervallum: (-1,1).

   (b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

   A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatároznunk.
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

   Azaz a hatványsor konvergenciasugara ∞, a konvergenciaintervallum: $\mathbb{R}$.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$$

A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatároznunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}} \to 1$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 1. Az biztos, hogy a (-1,1) nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

A fenti sor konvergens, ami majoránskritérium segítségével látható.

$$x = -1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Ez a sor is konvergens lesz, hisz Leibniz típusú (az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz). Tehát a konvergenciasugár 1, a konvergenciaintevallum: [-1,1].

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatároznunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \to 1$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 1. Az biztos, hogy a (-1,1) nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$$

A fenti sor divergens, ami minoránskritérium segítségével látható:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}} = \frac{1}{2n}$$

$$x = -1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

Ez a sor is konvergens lesz, hisz Leibniz típusú (az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz). Tehát a konvergenciasugár 1, a konvergenciaintevallum: [-1,1).

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

A feladat megoldása előtt át kell alakítanunk a fent megadott sort ténylegesen hatványsor alakba.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}(x-\frac{5}{4})^{2n+1}$$

A konvergenciasugár meghatározáshoz a következő határértéket kell meghatároznunk.

$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{\frac{4^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}} \to 4$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara $\frac{1}{4}$. Az biztos, hogy a $(1, \frac{3}{2})$ nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ami konvergens.

$$x = \frac{3}{2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ami szintén konvergens. Tehát a konvergenciasugár $\frac{1}{4}$, a konvergenciaintevallum: $[1, \frac{3}{2}]$.

2. Mely x-ek esetén konvergens az

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \ldots$$

végtelen sor? Mi a sor összege? Melyik sort kapjuk tagonkénti deriválással? Mely x-ek esetén konvergens az új sor?
A fenti sort írjuk fel szumma alakban:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$$

Ebből már egyszerűen megállapíthatjuk a konvergenciasugárt a következő határérték meghatározásával.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \to \frac{1}{2}$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 2. Az biztos, hogy a (1,5) nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$$

A fenti sor divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

$$x = 5 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Ez a sor is divergens lesz, hiszen itt sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Tehát a konvergenciaintervallum: (1,5).
A sor összegének meghatározásához a geometriai sor összegképletét használjuk.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n = \frac{2}{2x-1}$$

A tagonkénti deriválással kapott új sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n n(x-3)^{n-1}$$

A konvergenciaintervallum meghatározásához itt is a következő határértéket kell megvizsgálnunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n\left(\frac{1}{2}\right)^n} \to \frac{1}{2}$$

Azaz a hatványsor konvergenciasugara 2. Az biztos, hogy a (1,5) nyílt intervallum része a konvergenciatartománynak, de a határpontokat is meg kell még vizsgálnunk.

$$x = 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n$$

A fenti sor divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

$$x = 5 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$

Ez a sor is divergens lesz, hiszen itt sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Tehát a konvergenciaintervallum itt is: (1,5).

3. Határozzuk meg az f(x) által (a jelzett helyen) generált Taylor-sort!

   (a)

$$f(x) = x^3 - 2x + 4, \qquad a = 0, \qquad f(0) = 4$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2 \qquad f'(0) = -2$$

$$f''(x) = 6x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 6 \qquad f'''(0) = 6$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \forall n \geq 4$$

Tehát a keresett Taylor polinom:

$$T(x) = 4 + \frac{-2}{1!}x + 0 + \frac{6}{3!}x^3 = x^3 - 2x + 4$$

Ebből azt a következtetés vonhatjuk le, hogy polinom Taylor-sora önmaga.

(b)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad a = 1$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy a fenti f függvény n-edik deriváltja a következő alakú:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$$
$$f^{(n)}(1) = (-1)^n(n+1)!$$

Ennek segítségével már egyszerűen felírható a Taylor-sor.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$$

(c)

$$f(x) = e^x, \qquad a = 2$$

A fenti f(x) függvény n-dik deriváltja:

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(2) = e^2$$

Ennek segítségével már egyszerűen felírható a Taylor sor.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

(d)

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad a = 0$$

A fenti f(x) függvény n-dik deriváltja:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Ennek segítségével már egyszerűen felírható a Taylor sor:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

(e)

$$f(x) = \arctan 2x, \qquad a = 2$$

A fenti f(x) függvény deriváltja:

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

Ezen függvény Taylor sorát fel tudjuk írni egyszerűen, és ebből tagonkánti integrálással megkapjuk az $\arctan 2x$ függvény Taylor-sorát is.

$$f'(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n x^{2n}$$

Így már egyszerűen felírható a Taylor-sor:

$$T(x) = \int 2\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n x^{2n} dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n x^{2n+1}}{2n+1} + c$$

Az $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $c = 0$, azaz

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{(-4)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

4. Adjuk meg a függvények Taylor-sorát az x=0 helyen!
A feladat egyszerűen megoldható, hogy ha ismerjük a nevezetes függvények Taxlor-sorát. Amennyiben nem emlékszünk rájuk, úgy a fenti feladatban leírt módszerrel dolgozzunk!

(a)

$$f(x) = xe^x$$

$$T(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

(b)

$$f(x) = x\cos\pi x$$

$$T(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x\pi)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\pi^{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

(c)

$$f(x) = \cos^2 x$$

A megoldás során felhasználjuk a következő linearizáló formulát: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$T(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

(d)

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

A feladat többféle módon is megoldható. Nyilván

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{1-x} + c = 1 + x + x^2 + \cdots + c$$

Innen deriválva kapjuk, hogy

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

VAGY: A binomális sor képletének felhasználásval, VAGY: az $\frac{1}{1-x}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzataként. A binomiális sor alapján

$$T(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-1)^n x^n$$

5. Írjuk fel a megadott függvények binomiális sorának első négy tagját!
   A feladat megoldása során a binomiális sor következő általános alakját használjuk:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(a)

$$f(x) = (1-x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$T_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \binom{-1/2}{n} (-x)^n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$$

(b)

$$f(x) = (1+x^3)^{\frac{-1}{2}}$$

$$T_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \binom{-1/2}{n} x^{3n} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9$$

(c)

$$f(x) = (1-2x)^3$$

$$T_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \binom{3}{n} (-2x)^n = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$$

6. Sorok segítségével számítsuk ki a határértékeket!

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1-x\right)=\lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}=\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}-x\right)=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{2n+1}=\frac{1}{3}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+-\dots}{1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-+\dots)}=2$$

7. Sorok segítségével adjunk 10^{-3} pontosságú becslést az alábbi határozott integrálokra!
Minden esetben a függvények 0 pont körüli Taylor-sorát használjuk közelítésként. Minden esetben elég a sor első három tagját tekintenünk, ugyanis akkor már a megadott pontosságú lesz a közelítésünk.

(a)

$$I=\int_0^{0.2}\sin x^2 \mathrm{d}x$$

Az integrál utáni függvény Taylor polinomja:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$T_3(x)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}$$

A Taylor-sor ismeretében most már közelíthetjük a fenti integrált.

$$I\approx\left[x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}\right]_0^{0.2}=0.2^2-\frac{0.2^6}{3!}+\frac{0.2^{10}}{5!}$$

(b)

$$I=\int_0^{0.1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

Az integrál utáni függvény Taylor polinomja:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$$

A Taylor-sor ismeretében most már közelíthetjük a fenti integrált.

$$I \approx \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right]_0^{0.1} = 1 - \frac{0.1^2}{3!} + \frac{0.1^4}{5!}$$

(c)

$$I = \int_0^{0.1} \sqrt{1 + x^4}\mathrm{d}x$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{4n}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8$$

A Taylor-sor ismeretében most már közelíthetjük a fenti integrált.

$$I \approx \left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^4\right]_0^{0.1} = 1 + \frac{1}{2}0.1 - \frac{1}{8}0.1^4$$