In[204]:=
```
SetOptions[#, GridLines -> All, PlotTheme -> "Scientific"] & /@ {Plot};
```

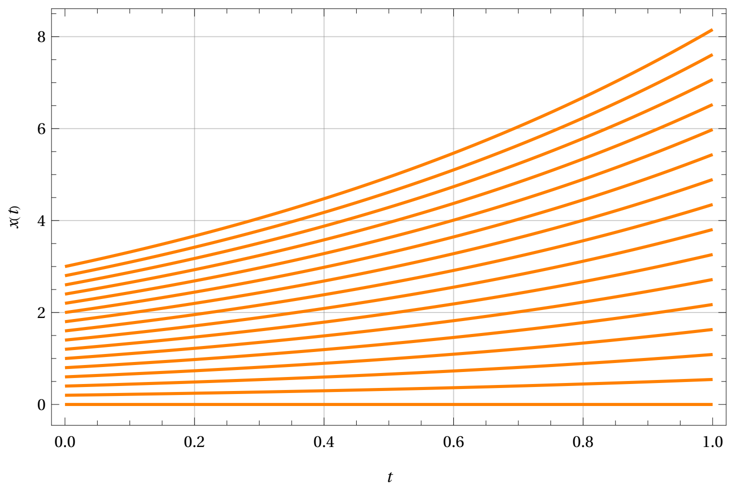
1. Feladat

Az exponenciális növekedés modellje:

$x'(t) = k\,x(t).$

Megoldások ábrázolása

Out[ ]=



3 pont

Korlátozott növekedés modellje:

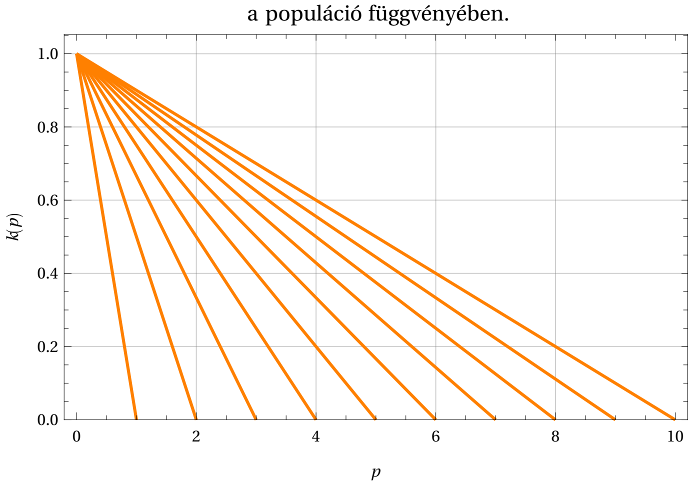
$x'(t) = K(x(t))\,x(t).$

A növekedési ráta nem állandó, hanem a populáció függvényében változik:

$K(p) = k - p\,k / L$

A növekedési ráta különböző L paraméterekre
a populáció függvényében.

Out[282]=



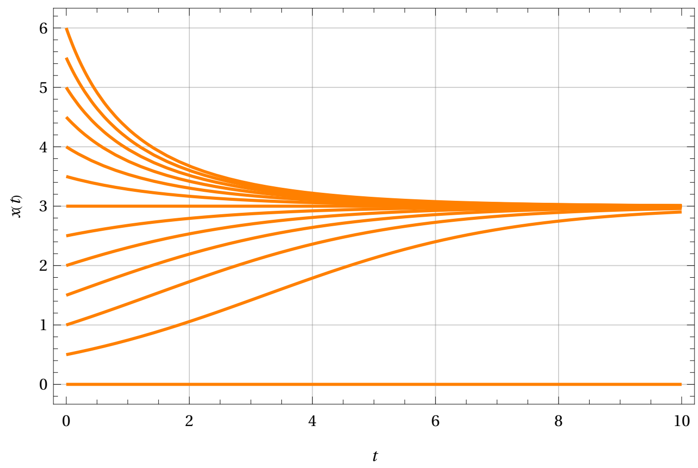
2 pont

Az így adódó egyenlet

$x'(t) = k\, x(t)\,(1 - x(t)/L)$

3 pont

Out[ ]=



2 pont

---

2. Feladat

A kezdeti feltétel miatt az értelmezési tartomány: $x > 0$

2 pont

Az implicit egyenletet explicit egyenletté alakítjuk:

Out[ ]//TraditionalForm=

$$y'(x) = 6\, x - \frac{5}{x}$$

2 pont

Integrálás után:

Out[ ]//TraditionalForm=

$$y(x) = C + 3\, x^2 - 5 \log(x)$$

4 pont

A kezdeti értéket behelyettesítve

Out[206]//TraditionalForm=

$$2 = C + 3$$

Amiből $C = -1$.

1 pont

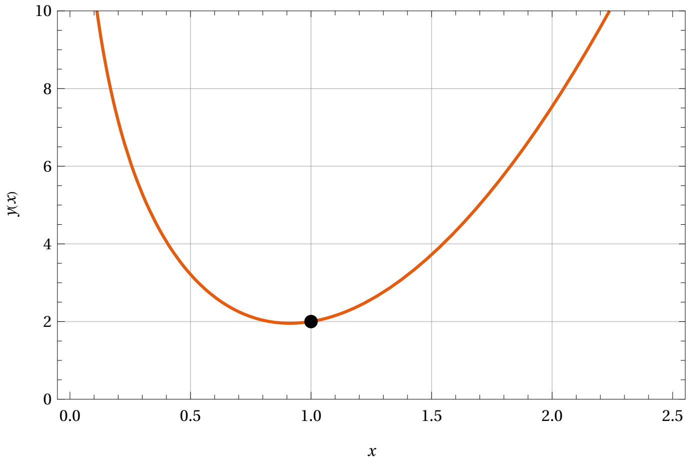
Így a kezdetiérték-probléma megoldása:

Out[207]//TraditionalForm=

$$y(x) = 3\,x^2 - 5\log(x) - 1$$

1 pont

Out[210]=



---

3. Feladat

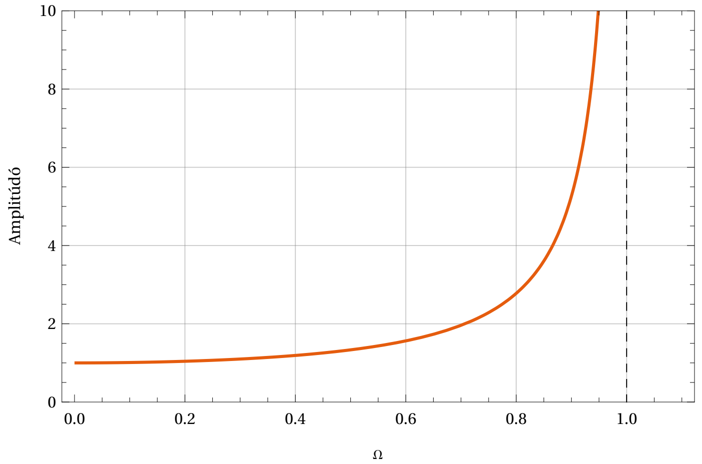
A stacionárius megoldás

Out[ ]//TraditionalForm=

$$x_{\mathrm{st}}(t) = \frac{\cos(t\,\Omega)}{\omega^2 - \Omega^2}$$

3 pont

Out[ ]=



2 pont

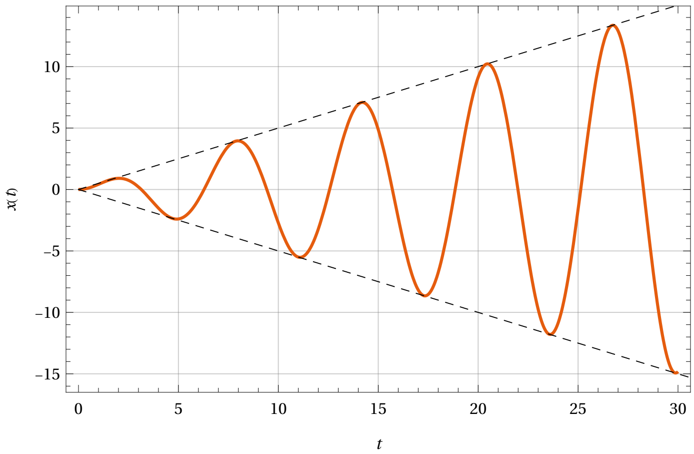
Rezonancia esetén a stacionáris megoldás:

Out[ ]//TraditionalForm=

$$x_{\mathrm{st}}(t) = \frac{t\sin(t\,\omega)}{2\,\omega}$$

3 pont

Out[ ]=



2 pont

4. Feladat

A hővezetés modellje:

$T'(t) = k(T_a - T(t))$

2 pont

A feladat szövege szerint $T(0) = 21$, $T(5) = 17$, $T_a = 8$.

Az egyenlet általános megoldása

$T(t) = T_a + (T(0) - T_a)\, e^{-k t} = 8 + 13\, e^{-k t}$

3 pont

A k paraméter érték meghatározásához: $T(5) = 17 = 8 + 18\, e^{-5 k}$, amiből

Out[ ]//TraditionalForm=

$$\left(k = \frac{1}{5}\log\left(\frac{13}{9}\right)\right) \approx 0.073545$$

2 pont

A folyadék tehát az alábbi függvény szerint hül:

$T(t) = 8\ +\ 13\, e^{-\frac{1}{5}\log\left(\frac{13}{9}\right) t}$

1 pont

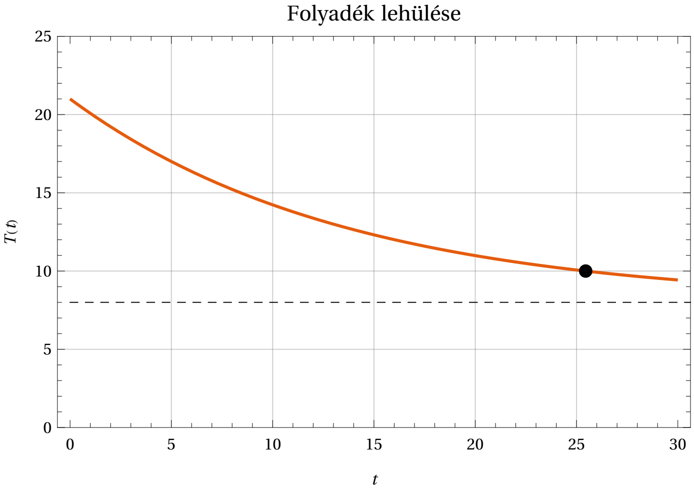
A folyadék 10° C-ot a t_* időpontban éri el: $T(t_*) = 10$, amiből

Out[ ]//TraditionalForm=

$$t_* = 25.4511$$

2 pont

Out[ ]=



5. feladat

Előre lépő Euler-módszer

$x_{k+1} = x_k + h\, f(t_k,\ x_k)$

3 pont

Hátra lépő Euler-módszer

$x_{k+1} = x_k + h\, f(t_{k+1},\ x_{k+1})$

3 pont

Középpontos Euler-módszer

$x_{k+1} = x_k + h\, f\left(t_k + \frac{h}{2},\ x_k + \frac{h}{2} f(t_k,\ x_k)\right)$

4 pont

6. Feladat

A homogén egyenlet megoldása:

Out[ ]//TraditionalForm=

$x_h(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{-t}\, t$

2 pont

A partikuláris egyenlethez a próbafüggvény (a kétszeres rezonancia miatt):

$x_p(t) = A\ +\ B\, t^2\, e^{-t}$

2 pont

Ennek deriváltjai:

Out[ ]//TraditionalForm=

$$x_p'(t) = 2\,B\,e^{-t}\,t - B\,e^{-t}\,t^2$$

Out[ ]//TraditionalForm=

$$x_p''(t) = B\,e^{-t}\,t^2 - 4\,B\,e^{-t}\,t + 2\,B\,e^{-t}$$

2 pont

Helyettesítés után:

Out[ ]//TraditionalForm=

$$A + 2\,(B + 1)\,e^{-t} = 3$$

Amiből: $A = 3$, $B = -1$ és így a partikuláris megoldás

Out[ ]//TraditionalForm=

$$x_p(t) = 3 - e^{-t}\,t^2$$

1 pont

A teljes megoldás

$$x(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,t\,e^{-t} - t^2\,e^{-t} + 3$$

1 pont

A kezdeti érték figyelembevételével

Out[ ]//TraditionalForm=

$$x(0) = c_1 + 3$$
$$x'(0) = c_2 - c_1$$

Amiből a megoldás: $c_1 = -3$, $c_2 = -3$.

1 pont

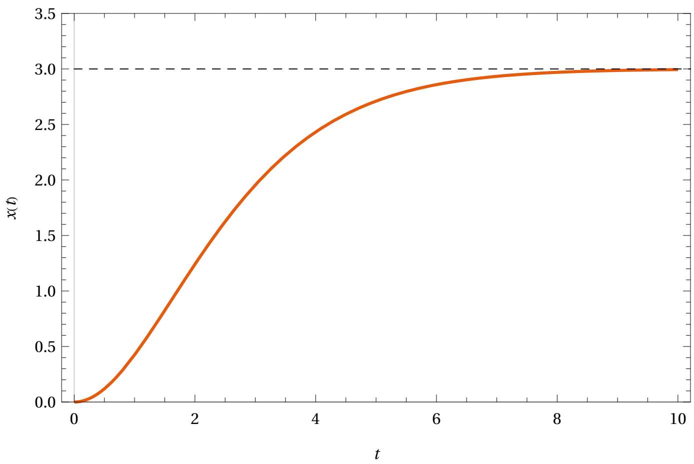
A kezdetiérték-probléma megoldása:

Out[ ]//TraditionalForm=

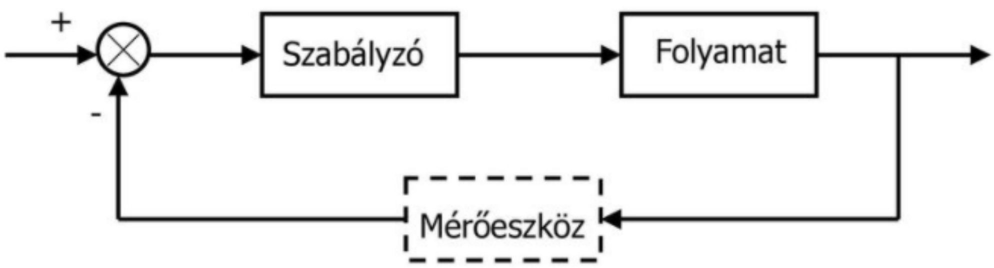
$$x(t) = -e^{-t}\,t^2 - 3\,e^{-t}\,t - 3\,e^{-t} + 3$$

1 pont

Out[ ]=



7. Feladat



2 pont

A folyamat egyenlete: $x'(t) = a\, x(t) + b\, u(t)$. A hiba jel $e(t) = r - x(t)$.

2 pont

A szabályzó egyenlete

- P szabályzó: $u(t) = k_P\, e(t)$
- PI szabályzó: $u(t) = k_p\, e(t) + k_I \int e(t)\, dt$

2 pont

A zárt körre vonatkozó differenciálegyenlet

- P szabályzó: $x'(t) = (a - b\, k_p)\, x(t) + b\, k_P\, r$

2 pont

- PI szabályzó: $x''(t) + (b\, k_P - a)\, x'(t) + b\, k_I\, x(t) = b\, k_I\, r$

2 pont

8. Feladat

A zárt szabályozási kör P szabályzó esetén: $x'(t) = -(0.2 + 2\,k_P)\,x(t) + 2\,k_P\,r$.

A stacionárius megoldás: $x_{\text{st}} = \frac{2\,k_P}{0.2+2\,k_P}\,r$.

2 pont

Azt szeretnénk, hogy a hiba kisebb legyen, mint egy százalék: $\left|\frac{x_{\text{st}}-r}{r}\right| < \frac{1}{100}$

Ebből

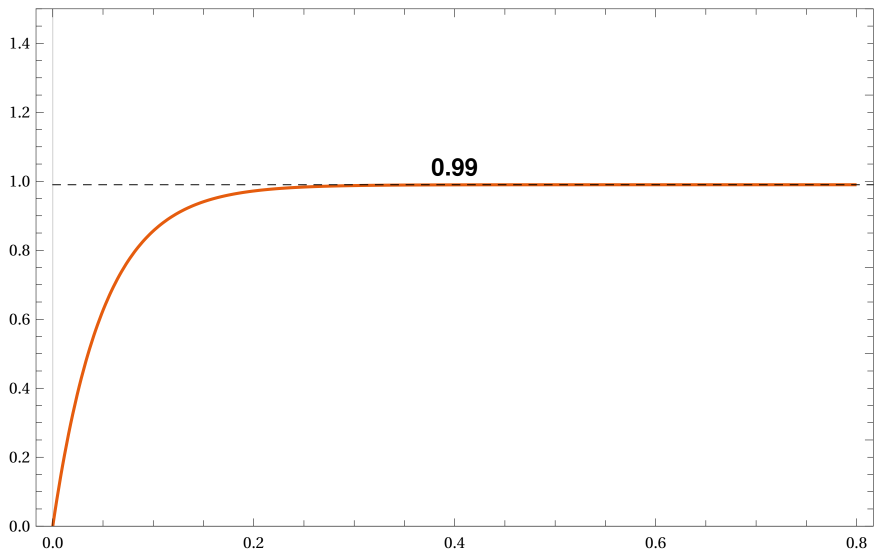
$$\left|\frac{x_{\text{st}}}{r} - 1\right| = \left|\frac{2\,k_P}{0.2+2\,k_P} - 1\right| = \left|\frac{-0.2}{0.2+2\,k_P}\right| < \frac{1}{100}$$

$20 < 0.2 + 2\,k_P$

$9.9 < k_P$

2 pont

Out[66]=



A zárt szabályozási kör PI szabyálozó esetén: $x''(t) + (0.2 + 2\,k_P)\,x'(t) + 2\,k_I\,x(t) = 2\,k_I\,r$.

A feladatban adott értékeket behelyettesítve: $x''(t) + 2\,x'(t) + 4.2\,x(t) = 4.2\,r$.

2 pont

A paraméterek mehatározásához $2\,\xi\,\omega = 2$, és $\omega^2 = 4.2$, amiből

Out[211]//TraditionalForm=

$\xi = 0.48795$

$\omega = 2.04939$

2 pont

A túllövés és a beállási idő:

$$\Delta x = 1 + e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad T_\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon \sqrt{1-\xi^2}}\right)}{\xi\, \omega}$$

Egyszerű behelyettesítéssel:

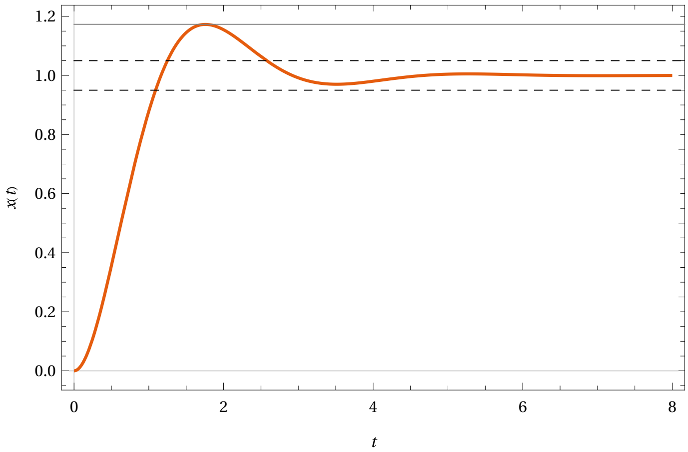
Out[277]//TraditionalForm=

$\Delta x = 1.1727$

$T_{0.05} = 3.1317$

2 pont

Out[180]=



---

9. Feladat

A differenciálegyenlet jobb oldala: $f(x) = \mu\, x - x^3$.

Egyensúlyi pontok $f(x) = 0$: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{\mu}$ $(\mu > 0)$.

2 pont

Stabilitás: $f'(x) = \mu - 3\, x^2$

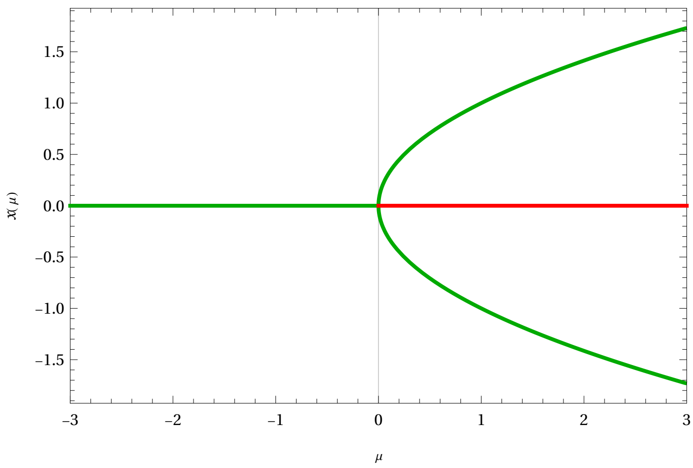
- $x_1 = 0$, $f'(x_1) = \mu$. Stabil, amikor $\mu < 0$ és instabil, amikor $\mu > 0$.

3 pont

- $x_{2,3} = \pm\sqrt{\mu}$, $f'(x_2) = -2\,\mu$. Itt csak a $\mu > 0$ értelmes, így ezek az egyensúlyi pontok mindig stabilak.

3 pont

Out[ ]=



2 pont

10. Feladat

A differenciálegyenlet jobb oldala: $f(x) = 3\,x(1 - x/L)$.

Egyensúlyi pontok: $f(x) = 0: \; x_1 = 0, \; x_2 = L$.

2 pont

Stabilitás $f'(x) = 3 - \frac{6}{L}\,x$

2 pont

- $x_1 = 0, \; f'(x_1) = 3 > 0$, instabil,

3 pont

- $x_2 = L, \; f'(x_2) = -3 < 0$, stabil.

3 pont