Algoritmuselmélet — Első gyakorlat
13, 19. tankör, 2014. február 10-13.

1. Az $f(n) = O(n)$ jelölés egyenletnek tekinthető-e? Mi fejezi ki a relációt a kifejezésben és mik között áll fenn?

2. Tegyük fel, hogy $f(n) = O(g(n))$ és $g(n) = O(h(n))$. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(h(n))$?

3. Bizonyítsuk be, hogy $2x^2 + x - 7 = \Theta(x^2)$.

---

4. Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + 4x + 17 = O(x^3)$, de $x^3 \neq O(x^2 + 4x + 17)$.

5. Lássuk be, hogy bármilyen rögzített $1 < a$ alapra igaz a következő.

$$\log_a n = \Theta(\log_2 n)$$

6. Döntsük el, hogy az alábbi becslések közül melyek igazak.

(a) $n^3 + n^4 = O(e^{\ln^2 n})$ (b) $5 \log_2 n \cdot \sqrt{n} + 100n = \Theta(n)$
(c) $2^n + 3^n = O(2^n)$ (d) $2^n + 3^n = O(3^n)$
(e) $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

7. Az f, g függvényekről tudjuk, hogy $f(1) = g(1) = 1$, és hogy minden n pozitív egészre $f(n+1) = f(n) + 3$, de $g(n+1) = 2g(n) + 3$. Mely becslések igazak az alábbiak közül?

(a) $f(n) = O(n)$, (b) $f(n) = \Omega(n)$, (c) $g(n) = O(n)$, (d) $g(n) = \Omega(n)$.

8. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n > 3$ egész számra $L(n) \leq L(n-1) + \frac{n}{2}$ teljesül, és hogy $L(3) = 3$. Milyen felső becslést adhatunk ez alapján $L(n)$-re?

---

9. Bizonyítsuk be, hogy
(a) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0 \quad (a_k \neq 0) \implies f(n) = \Theta(n^k)$.
(b) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$.

10. Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy
(a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?
(b) minden x bemeneten legfeljebb $2010|x|$ lépést használ?
(Itt $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

11. Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n^2)$. Lehetséges-e, hogy

1. $\forall n$ hosszú bemeneten $O(n)$ lépést használ?
2. $\exists x$, hogy az x bemeneten az algoritmus lépésszáma $10|x|^2 \log|x| - 800$ (ahol $|x|$ az x bemenet hosszát jelöli)?