Algoritmuselmélet — Második gyakorlat
13, 19. tankör, 2014. február 17-20.

1. Oldjuk meg a hátizsák-problémát (azaz töltsük ki a megfelelő táblázatot) az alábbi konkrét esetben:

Legyen $n = 4$, a tárgyak súlyai $s_1 = 7, s_2 = 5, s_3 = 4, s_4 = 1$ és értékei $v_1 = 20, v_2 = 14, v_3 = 10, v_4 = 1$, a súlykorlát $b = 10$.

2. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával : a:b,c; b:a,d; c:a,d; d:b,c,e,f; e:d,f,g; f:d,e,g,h; g:e,f,h; h:f,g;
Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

3. Egy játékban egy $n \times m$ rács bal felső sarkából kell eljutnunk a jobb alsó sarokba. Egy lépés során a rács mentén vizszintesen vagy függőlegesen tudunk a következő rácspontba lépni. Azonban van néhány kereszteződés, ahova nem szabad lépnünk. Ezek helyét az R tömb írja le, $R[i, j] = 1$, ha az (i, j) kereszteződésbe nem léphetünk, egyébként $R[i, j] = 0$. Adjon $O(nm)$ futási idejű algoritmust annak meghatározására, hogy pontosan $n+m-2$ lépést téve a rácson hányféleképpen tudjuk a célt elérni.

---

4. Az n elemű A tömb egész számokkal (lehetnek negatív számok is) van feltöltve. Adjon algoritmust, ami meghatároz egy olyan $(i, j), 1 \le i \le j \le n$ indexpárt, amire $A[i] + A[i+1] + \cdots + A[j]$ maximális. (Azaz keressük a legnagyobb, folytonosan előálló összeget.) Az algoritmus futási ideje legyen $O(n)$.

5. Éllistával adott a súlyozott élű $G(V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az $1, 2, 3$ számok közül valók. Javasoljunk $O(n+e)$ költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására!

6. Legyen $s_1 s_2 \ldots s_n$ és $t_1 t_2 \ldots t_m$ két olyan karaktersorozat, melyek nullákból és egyesekből állnak. Azt szeretnénk, hogy az $n \times m$ méretű A mátrix $A[i, j]$ eleme tartalmazza azt a legnagyobb k számot, melyre az $s_1 s_2 \ldots s_i$ és a $t_1 t_2 \ldots t_j$ karaktersorozatok utolsó k tagja megegyezik. Adjon eljárást, ami az A tömböt $O(nm)$ lépésben kitölti.

7. Legyen $G(L, U; E)$ a következő páros gráf:
$L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $U = \{6, 7, 8, 9, 10, \}$; az éllista L-ből:
1:6,7,8; 2:6,9,10; 3:6,7; 4:8,9,10; 5:6;
Keressünk G-ben max. párosítást a magyar módszerrel!

8. Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Egy ilyen út értéke a benne szereplő számok összege. Adjon $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb!

---

9. Adott egy n és egy m hosszú 0-1 sorozat, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, illetve $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Ezek alapján egy T tömböt töltöttünk ki a következő módon:

Ha $0 \le i \le n$, akkor $T[i, 0] = 0$. Ha $0 \le j \le m$, akkor $T[0, j] = 0$.

Ha $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le m$, akkor $T[i, j] = \begin{cases} T[i-1, j-1] + 1 & \text{ha } a_i = b_j \\ \max\{T[i, j-1],\, T[i-1, j]\} & \text{ha } a_i \ne b_j \end{cases}$

Írja le, hogy mi a jelentése a $T[i, j]$ értéknek! A két sorozatnak milyen tulajdonságát adja meg a $T[n, m]$ érték?