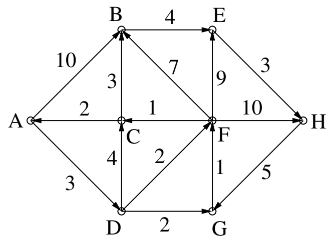
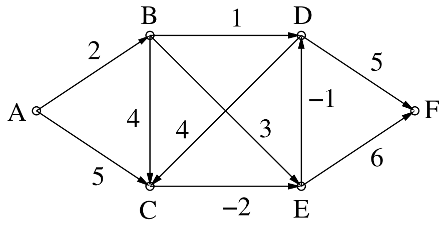
Algoritmuselmélet — Harmadik gyakorlat

13, 19. tankör, 2014. február 24-27.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával : a:b,c; b:a,d; c:a,d; d:b,c,e,f; e:d,f,g; f:d,e,g,h; g:e,f,h; h:f,g;
Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

2. Határozzuk meg az első gráfban az A csúcsból induló legkisebb súlyú utak hosszát a Dijkstra algoritmussal; a második gráfban az A csúcsból induló legkisebb súlyú utak hosszát a Bellman-Ford algoritmussal, valamint az összes csúcspárok közti legkisebb súlyú utak hosszát a Floyd algoritmussal.





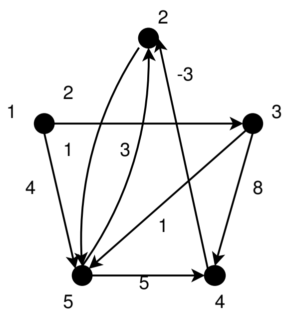
---

3. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig a következőek: $s(a, b) = 6$, $s(a, c) = 5$, $s(a, e) = 8$, $s(b, a) = 5$, $s(b, e) = 1$, $s(b, f) = 2$, $s(c, b) = 2$, $s(c, f) = 4$, $s(e, b) = 6$, $s(e, d) = 3$, $s(f, d) = 1$, $s(f, e) = 1$.
a) Dijkstra-algoritmussal határozza meg a-ból az összes többi pontba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de lépésenként írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb és a KÉSZ halmaz állapotát.)
b) Vegyük hozzá a gráfhoz az (b, d) élet. Milyen $s(b, d) \geq 0$ súlyok esetén változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?

4. Határozza meg a legrövidebb utak hosszát az A csúcsból az alábbi gráfban, a Bellman-Ford algoritmust futtatva. Lépésenként jelezze, hogyan változik az algoritmus által kitöltött T tömb.
A:B(3),F(1),E(12); B:C(2); C:D(4),G(2); D:E(1); E:C(-3); F:B(-1),G(4),; G:H(2); H:D(2),E(1).

5. Legyen $G(L, U; E)$ a következő páros gráf:
$L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $U = \{6, 7, 8, 9, 10, \}$; az éllista L-ből:
1:6,7,8; 2:6,9,10; 3:6,7; 4:8,9,10; 5:6;
Keressünk G-ben max. párosítást a magyar módszerrel!

6. Az alábbi gráfon a Floyd-algoritmust futtatjuk. Az algoritmus során (a 4. javítási menet végén) az F_4 tartalmazza az ismert úthosszakat.



$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 10 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 5 & 0 & 8 & 1 \\ \infty & -3 & \infty & 0 & -2 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hogyan változik a táblázat amikor minden csúcspárra újra elvégezzük a frissítést?

---

7. Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép megfertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t + 1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszĂş listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja.

8. Mutassuk meg, hogyan határoznánk meg Dijkstra algoritmussal az 1-es csúcsból indulva a legrövidebb utakat az összes többi pontba ha tudjuk, hogy $j > i$ esetén $c_{i,j} = 2 \cdot (j - i - 1) + 1$. Ha $j \leq i$, akkor nincsenek élek.

9. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n pontú, súlyozott élű irányított gráf! Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására!