2012/13/1. Bevezető Matematika
1. zárthelyi dolgozat megoldások
A csoport

1. feladat Rakja növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\ln\frac{1}{e^3},\quad \sqrt{7+2\sqrt{3}},\quad \sqrt{64^{\frac{1}{3}}}$$

Megoldás:

- $\ln\frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3$ (2 pont)
- $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$:
  $1 < \sqrt{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < 2\sqrt{3} < 4 \quad \Rightarrow \quad 9 < 7+2\sqrt{3} < 11 \quad \Rightarrow 3 < \sqrt{7+2\sqrt{3}} < 4$
  (3 pont)
- $\sqrt{64^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{(2^6)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2^{6\cdot\frac{1}{3}}} = \sqrt{2^2} = 2$ (2 pont)

Tehát a növekvő sorrend: $\ln\frac{1}{e^3} \quad < \quad \sqrt{64^{\frac{1}{3}}} \quad < \quad \sqrt{7+2\sqrt{3}}$. (1 pont)

2. feladat

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 9}\cdot 3^2 + \left(\log_2 5 + \log_2\frac{8}{5}\right) = ?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{3}\right)^{\log_3 9}\cdot 3^2 + \left(\log_2 5 + \log_2\tfrac{8}{5}\right) &= \\
\left(3^{-1}\right)^{\log_3 3^2}\cdot 3^2 + \left(\log_2 5 + \log_2\tfrac{8}{5}\right) &= && \text{(1 pont)}\\
\left(3^{-1}\right)^{2}\cdot 3^2 + \left(\log_2 5 + \log_2\tfrac{8}{5}\right) &= && \text{(1 pont)}\\
\left(3^{-2}\right)\cdot 3^2 + \left(\log_2 5 + \log_2\tfrac{8}{5}\right) &= && \text{(1 pont)}\\
1 + \left(\log_2 5 + \log_2\tfrac{8}{5}\right) &= && \text{(1 pont)}\\
1 + \left(\log_2 5\cdot\tfrac{8}{5}\right) &= && \text{(1 pont)}\\
1 + \log_2 8 &= && \text{(1 pont)}\\
1 + \log_2 2^3 &= && \text{(1 pont)}\\
1 + 3 &= 4 && \text{(1 pont)}
\end{aligned}$$

3. feladat

$$\sin\frac{31\pi}{6} - \mathrm{ctg}\frac{9\pi}{4} =?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{31\pi}{6} - \mathrm{ctg}\tfrac{9\pi}{4} &= \\
\sin\tfrac{-5\pi}{6} - \mathrm{ctg}\tfrac{9\pi}{4} &= \quad (1\text{ pont})\\
\sin\tfrac{-5\pi}{6} - \mathrm{ctg}\tfrac{\pi}{4} &= \quad (1\text{ pont})\\
-\tfrac{1}{2} - \mathrm{ctg}\tfrac{\pi}{4} &= \quad (2\text{ pont})\\
-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} & \quad (1\text{ pont})\\
-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1} = -\tfrac{3}{2} & \quad (3\text{ pont})
\end{aligned}$$

4. feladat Hozza a lehető legegyszerűbb alakra:

$$\frac{(\sqrt{3})^{2n}\cdot 2^n\cdot 9^{-n}\cdot 27^{\frac{n}{3}}}{(\sqrt{2})^{2n}\cdot 2^n + 2\cdot 2^{2n} + 16^{\frac{n}{2}}}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\tfrac{(\sqrt{3})^{2n}\cdot 2^n\cdot 9^{-n}\cdot 27^{\frac{n}{3}}}{(\sqrt{2})^{2n}\cdot 2^n+2\cdot 2^{2n}+16^{\frac{n}{2}}} &= \\
\tfrac{\left((\sqrt{3})^2\right)^n\cdot 2^n\cdot\left(3^2\right)^{-n}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{n}{3}}}{\left((\sqrt{2})^2\right)^n\cdot 2^n+2\cdot 2^{2n}+(2^4)^{\frac{n}{2}}} &= \quad (2\text{ pont})\\
\tfrac{3^n\cdot 2^n\cdot 3^{-2n}\cdot 3^n}{2^n\cdot 2^n+2\cdot 2^{2n}+2^{2n}} &= \quad (2\text{ pont})\\
\tfrac{3^0\cdot 2^n}{2^{2n}+2\cdot 2^{2n}+2^{2n}} &= \quad (1\text{ pont})\\
\tfrac{2^n}{4\cdot 2^{2n}} &= \quad (1\text{ pont})\\
\tfrac{1}{4\cdot 2^n} &= \quad (0{,}5\text{ pont})\\
\tfrac{1}{2^{n+2}} & \quad (0{,}5\text{ pont})
\end{aligned}$$

5. feladat Legyen $f(x) = e^{x^2-1}$ és $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$. Mivel egyenlő $f(g(x)), g(f(x)), f(g(6))$ és $g(f(1))$?

Megoldás: Tekintsük először, hogy van- az értlmezési tartományoknak és értékkészleteknek metszete. (Vagyis van-e értelme az összetett függvényről beszélni?)

$$D_f : \mathrm{R} \quad R_g : \mathrm{R} \quad \Rightarrow \quad D_f \cap R_g \neq \varnothing \quad (1\text{ pont})$$

$$D_g : \mathrm{R} \quad R_f : \left[\mathrm{e}^{-1}; \infty\right) \quad \Rightarrow \quad D_g \cap R_f \neq \varnothing \quad (1\text{ pont})$$

- $$f(g(x)) = e^{(\sqrt[3]{x+2})^2-1} \quad (2{,}5\text{ pont})$$

- $$g(f(x)) = \sqrt[3]{e^{x^2-1}+2} \quad (2{,}5\text{ pont})$$

- $$f(g(6)) = e^{(\sqrt[3]{6+2})^2-1} = e^{(\sqrt[3]{8})^2-1} = e^{2^2-1} = e^3 \quad (1{,}5 \text{ pont})$$
- $$g(f(1)) = \sqrt[3]{e^{1^2-1}+2} = \sqrt[3]{e^0+2} = \sqrt[3]{3} \quad (1{,}5 \text{ pont})$$

6. feladat Adja meg az alábbi függvény zérushelyeit és értelmezési tartományát:

$$f(x) = \frac{2(x-3)(x+2)^3 - 3(x+2)^2(x-3)^2}{(x-3)^4(x+2)}$$

Megoldás: Először az értelmezési tartományt adjuk meg! A nevezőben nem lehet 0. Vagyis $x \neq 3$ és $x \neq -2$. Vagyis D : R $\setminus \{-2; 3\}$ (2 pont)

A zérushely meghatározásához az $f(x) = 0$ egyenletet kell megoldani. Egyszerűsítsük a törtet, amennyire csak lehet!

$$\tfrac{2(x-3)(x+2)^3-3(x+2)^2(x-3)^2}{(x-3)^4(x+2)} = \tfrac{2(x+2)^2-3(x+2)(x-3)}{(x-3)^3} \quad (2 \text{ pont})$$

Egy tört értéke akkor lesz 0, ha a számláló azonosan 0. Vagyis

$$\begin{aligned}
2(x+2)^2 - 3(x+2)(x-3) &= 0 \qquad (1 \text{ pont})\\
2[x^2+4x+4] - 3[x^2-x-6] &= 0\\
2x^2+8x+8-3x^2+3x+18 &= 0\\
-x^2+11x+26 &= 0 \qquad (2 \text{ pont})
\end{aligned}$$

A másodfokú egyenlet megoldó képlete alapján a két zérushely:

$$\frac{-11 \pm \sqrt{121+4\cdot 26}}{(-2)} = \frac{-11 \pm 15}{(-2)}$$

Vagyis a két zérushely a -2 és a 13. A -2 nem jó, mert nincs benne az értelmezési tartományban, vagyis a megoldás csak a 13. (1 pont)

2012/13/1. Bevezető Matematika
1. zárthelyi dolgozat megoldások
B csoport

1. feladat Rakja növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\lg 0,0001, \quad e^{2\ln 2}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\log_3 9}$$

Megoldás:

- $\lg 0,0001 = \lg 10^{-4} = -4$ (2 pont)
- $e^{2\ln 2} = e^{\ln 2^2} = 4$ (2 pont)
- $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\log_3 9} = \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{\log_3 3^2} = \left(3^{-\frac{1}{2}\cdot 2\log_3 3}\right) = \left(3^{\log_3 3}\right)^{(-1)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ (3 pont)

Tehát a növekvő sorrend:

$$\lg 0,0001 \quad < \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\log_3 9} \quad < \quad e^{2\ln 2}.$$

(1 pont)

2. feladat

$$(\log_2 56 - 2\log_2 \sqrt{7}) + \sin\frac{10\pi}{3}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
(\log_2 56 - 2\log_2 \sqrt{7}) + \sin\tfrac{10\pi}{3} &= \\
(\log_2 56 - \log_2 (\sqrt{7})^2) + \sin\tfrac{10\pi}{3} &= && \text{(1 pont)}\\
(\log_2 56 - \log_2 7) + \sin\tfrac{10\pi}{3} &= && \text{(1 pont)}\\
(\log_2 \tfrac{56}{7}) + \sin\tfrac{10\pi}{3} &= && \text{(1 pont)}\\
(\log_2 8) + \sin\tfrac{10\pi}{3} &= && \text{(1 pont)}\\
(\log_2 2^3) + \sin\tfrac{10\pi}{3} &= && \text{(1 pont)}\\
3 + \sin\tfrac{10\pi}{3} &= && \text{(1 pont)}\\
3 + \sin\tfrac{4\pi}{3} &= && \text{(1 pont)}\\
3 - \tfrac{\sqrt{3}}{2} &= && \text{(1 pont)}
\end{aligned}$$

3. feladat

$$\sqrt[3]{0,027}-\frac{4^5+4^4}{4^5+4^6-4^4}=?$$

Megoldás:

$$\sqrt[3]{0,027}-\frac{4^5+4^4}{4^5+4^6-4^4}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}-\frac{4^5+4^4}{4^5+4^6-4^4}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}}-\frac{4^5+4^4}{4^5+4^6-4^4}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{10^3}}-\frac{4^5+4^4}{4^5+4^6-4^4}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{3}{10}-\frac{4^5+4^4}{4^5+4^6-4^4}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{3}{10}-\frac{4^4(4+1)}{4^4(4+4^2-1)}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{3}{10}-\frac{4+1}{4+4^2-1}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{3}{10}-\frac{5}{19}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{57}{190}-\frac{50}{190}=\frac{7}{190} \qquad \text{(1 pont)}$$

4. Hozza a lehető legegyszerűbb alakra:

$$\frac{2+\frac{3x-1}{1-x}}{1-\frac{x^2}{x^2-1}} : \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$$

Megoldás:

$$\frac{2+\frac{3x-1}{1-x}}{1-\frac{x^2}{x^2-1}} : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} =$$

$$\left[\left(2+\frac{3x-1}{1-x}\right) : \left(1-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\left(\frac{2(1-x)}{1-x}+\frac{3x-1}{1-x}\right) : \left(1-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\left(\frac{2-2x}{1-x}+\frac{3x-1}{1-x}\right) : \left(1-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{2-2x+3x-1}{1-x} : \left(1-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{x+1}{1-x} : \left(1-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{x+1}{1-x} : \left(\frac{x^2-1}{x^2-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{x+1}{1-x} : \left(\frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right)\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{x+1}{1-x} : \frac{x^2-1-x^2}{(x-1)(x+1)}\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{x+1}{1-x} : \frac{-1}{(x-1)(x+1)}\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{x+1}{1-x} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{-1}\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{x+1}{1-x} \cdot \frac{(1-x)(x+1)}{1}\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$\left[\frac{(x+1)(x+1)}{1}\right] : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$[(x+1)(x+1)] \cdot \frac{x^2-x+1}{x^3+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

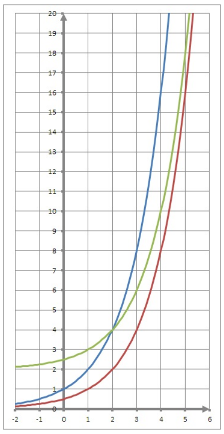
$$(x+1)(x+1) \cdot \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$(x+1)(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = \qquad \text{(0,5 pont)}$$

$$(x+1) \qquad \text{(0,5 pont)}$$

5. feladat Ábázolja az alábbi függvényt, és adja meg az inverzét!

Megoldás:



Az ábrán zölddel látható a megadott függvény.

(a) Először a 2^x függvényt érdemes felrajzolni. - Az ábrán kékkel. (1 pont)

(b) Ez után a 2^{x-1}-et. Ezt úgy kapjuk, hogy az előző (2^x) függvényt eltoljuk az x tengely mentén a negatív irányba -1-gyel (pozitív irányba 1-gyel). - Az ábrán pirossal. (1 pont)

(c) Ez után tudjuk könnyen felrajzolni a

$2^{x-1}+2$ függvényt, melyet úgy kapunk, ha az elöbb felrajzolt függvényt eltoljuk az y tengely mentén pozitív irányba 2-vel. - Ábrán zölddel. (1 pont)

Írjuk fel ez után a függvény inverzét! Ehhez ellenőrizzuk, hogy a függvény egy-egy értelmű. Erre két lehetőség van:

- Tegyük fel, hogy $\exists$ olyan $s \neq t$, melyre:

$$2^{s-1}+2 = 2^{t-1}+2$$
$$2^{s-1} = 2^{t-1}$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton:

$$s-1 = t-1$$
$$s = t$$

  Mivel azt tettük fel, hogy $s \neq t$ ellentmondásra jutottunk, tehát a függvény egy-egy értelű, azaz van inverze. (2 pont)

- Ezzel egyenértékű: Az exponenciális függvény szigorúen monoton, tehát a ennek eltoltja is szigorún monoton. Vagyis bármely két x-hez különböző értékeket rendel. Vagyis a függvény egy-egy értelmű. Tehát a függvénynek van inverze.

Adjuk meg tehát az inverzét! Ehhez fejezzük ki az y értékét az $y = 2^{x-1}+2$ egyenletből.

$$\begin{aligned} y &= 2^{x-1}+2 && \text{(1 pont)} \\ y-2 &= 2^{x-1} && \text{(1 pont)} \\ \log_2 y-2 &= x-1 && \text{(1 pont)} \\ 1+\log_2 y-2 &= x && \text{(1 pont)} \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a fügvény inverzát adjuk meg fel kell cserélnünk az x és y értékét, vagyis $f^{-1} = 1+\log_2 x-2$. (1 pont)

6. feladat Legyen $f(x) = x\sqrt{x}+2$ és $g(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Mivel egyenlő $f(g(x)), g(f(x)), f(g(1))$ és $g(f(1))$?

Megoldás:

Tekintsük először, hogy van- az értlmezési tartományoknak és értékkészleteknek metszete. (Vagyis van-e értelme az összetett függvényről beszélni?)

$$D_f : \mathrm{R}^+ \cup \{0\} \quad R_g : \mathrm{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad D_f \cap R_g \neq \varnothing \quad \text{(1 pont)}$$

$$D_g : \mathrm{R} \ \setminus \{0\} \quad R_f : [2, \infty] \cup \{0\} \quad \Rightarrow \quad D_g \cap R_f \neq \varnothing \quad \text{(1 pont)}$$

- $$f(g(x)) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}} + 2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x}} + 2 \quad \text{(2 pont)}$$
- $$g(f(x)) = \frac{2}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}+2}} \quad \text{(2 pont)}$$
- $$f(g(1)) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{1}\sqrt[6]{1}} + 2 = \frac{2\sqrt{2}}{1\cdot 1} + 2 = 2\sqrt{2} + 2 \quad \text{(1 pont)}$$
- $$\frac{2}{\sqrt[3]{1\cdot\sqrt{1}+2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{(1 pont)}$$