2012/13/1. Bevezető Matematika
2. zárthelyi dolgozat megoldások
A csoport

1. feladat Oldja meg a következő egyenlet:

$$2^{3x^2-3x-18} = 8^{\frac{x+2}{x-3}}$$

Megoldás: Elsőként értelmezési tartományt kell vizsgálnunk (vagy pedig a legvégén visszahelyettesíteni az összes megoldást!) Az értelmezési tartomány: R $\setminus$ {3}. **(1 pont)**

$$\begin{aligned} 2^{3x^2-3x-18} &= 8^{\frac{x+2}{x-3}} \\ 2^{3x^2-3x-18} &= (2^3)^{\frac{x+2}{x-3}} && \textbf{(1 pont)} \\ 2^{3x^2-3x-18} &= 2^{3\frac{x+2}{x-3}} && \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton **(0,5 pont)**, ezért:

$$\begin{aligned} 3x^2-3x-18 &= 3\frac{x+2}{x-3} && \textbf{(1 pont)} \\ 3(x^2-x-6) &= 3\frac{x+2}{x-3} && \textbf{(0,5 pont)} \\ x^2-x-6 &= \frac{x+2}{x-3} && \textbf{(0,5 pont)} \end{aligned}$$

A bal oldalon álló másodfokú kifejezés gyöktényezős alakjának meghatározásához használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét.

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$
$$\frac{1 \pm 5}{2}$$

Vagyis $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Tehát $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ **(2 pont)**

$$(x-3)(x+2) = \frac{x+2}{x-3} \qquad \textbf{(0,5 pont)}$$

Itt két esetet kell vizsgálni. Vagy $x + 2 = 0$, azaz $x = -2$, vagy $x \neq -2$. **(0,5 pont)** Az első esetben egyértelműen látszik, hogy az állítás igaz, tehát $x = -2$ az egyenlet egyik megoldása. A második esetben $x+2 \neq 0$, vagyis eloszthatjuk vele az egyenlet mindkét oldalát.

$$(x-3)(x+2) = \tfrac{x+2}{x-3}$$

$$(x-3) = \tfrac{1}{x-3} \qquad \text{ha } x \neq -2 \qquad \textbf{(0,5 pont)}$$

$$(x-3)^2 = 1 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$x-3 = \pm 1 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$x = 2 \qquad \text{vagy } x = 4 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát az egyenlet három megoldása $x=-2, x=2, x=4$.

2. feladat Oldja meg a következő egyenletet:

$$2\cos 2x + 3\sin^2 x = 1 - \cos x$$

Megoldás:

$$2\cos 2x + 3\sin^2 x = 1 - \cos x$$

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3\sin^2 x = 1 - \cos x \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$2(\cos^2 x - 2\sin^2 x) + 3\sin^2 x = 1 - \cos x \qquad \textbf{(0,5 pont)}$$

$$2\cos^2 x + \sin^2 x = 1 - \cos x \qquad \textbf{(0,5 pont)}$$

$$2\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 1 - \cos x \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$\cos^2 x + 1 = 1 - \cos x \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Akár az $a = \cos x$ új változót bevezetve, akár anélkül $\cos x$-re megoldva az egyenletet kapjuk, hogy:

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\cos x = 0 \text{ vagy } \cos x = -1 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

- Az első eset:

$$\cos x = 0$$

$$x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathrm{Z} \text{ vagy } x = \tfrac{3\pi}{2} + 2l\pi \qquad l \in \mathrm{Z} \quad \textbf{(2 pont)}$$

  Ezt máshogy megfogalmazva: $x = \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad m \in \mathrm{Z}$

- A második eset:

$$\cos x = -1$$
$$x = \pi + 2n\pi \qquad n \in \mathrm{Z} \quad \textbf{(1 pont)}$$

3. feladat Milyen $k \in \mathrm{R}$ esetén lesz két különböző valós megoldás, ha $kx^2 - (k+3)x + 4 = 0$?

   Megoldás:

   Egy másodfokú egyenletnek akkor van két megoldása, ha a diszkrimináns pozitív. **(1 pont)** Jelen esetben a diszkrimináns értéke:

   $$D = (k+3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot k \qquad \textbf{(2 pont)}$$

   Vagyis:

   $$(k+3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot k > 0 \quad \textbf{(1 pont)}$$
   $$(k+3)^2 - 16k > 0 \quad \textbf{(1 pont)}$$
   $$k^2 + 6k + 9 - 16k > 0 \quad \textbf{(2 pont)}$$
   $$k^2 - 10k + 9 > 0 \quad \textbf{(1 pont)}$$

   A bal oldalon álló másodfokú kifejezés gyöktényezős alakjának meghatározásához használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét.

   $$\frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2}$$
   $$\frac{10 \pm 8}{2}$$

   Vagyis $k_1 = 1$, $k_2 = 9$. Tehát $k^2 - 10k + 9 = (k-1)(k-9)$. **(2 pont)**

   Egy másodfokú kifejezés értéke -ha a főegyüttható pozitív- a két gyök között negatív, a gyököknél nulla, egyéb esetekben pozitív. **(1 pont)** Vagyis $k < 1$ vagy $k > 9$ esetén lesz a diszkrimináns értéke pozitív, vagyis ekkor lesz az eredeti egyenletnek két valós megoldása. **(2 pont)**

4. feladat Három szám számtani sorozatot alkot, az összegük 300. Ha a harmadikhoz 50-et hozzáadunk mértani sorozatot kapunk. Melyik ez a három szám?

   Megoldás: A feladatban megfogalmazottak "összefoglalása" az ábrán látható:

   $$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3$$

   $$a_1 \xrightarrow[\cdot q]{} a_2 \xrightarrow[\cdot q]{} a_3 + 50$$

A számtani sorozat elemei legyenek a_1, a_2, a_3. A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a_1 = a_2 - d$ **(1 pont)**és $a_3 = a_2 + d$ **(1 pont)**. (Természetesen ha valaki a_1-gyel fejezte ki a többit az is tökéletes.)

Ez alapján

$$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 300 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$
$$3a_2 = 300 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$
$$a_2 = 100 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$

A feladat szövege szerint a $100 - d, 100, 100 + d + 50$ számok mértani sorozatot alkotnak. Vagyis bármely két szomszédos elem hányadosa megegyezik. **(1 pont)** Az első elem nem lehet 0, hiszen ha egy mértani sosorzat egyik eleme 0, akkor az összes eleme 0, azonban ennek egyik eleméről tudjuk, hogy 100. **(1 pont)**

Tehát:

$$\tfrac{100}{100-d} = \tfrac{100+d+50}{100} \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$\tfrac{100}{100-d} = \tfrac{150+d}{100} \quad \textbf{(0,5 pont)}$$
$$100^2 = (150 + d)(100 - d) \quad \text{a szorzás elvégezhető, mert egyik elem sem 0!} \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$10000 = 15000 + 100d - 150d - d^2 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$
$$0 = d^2 + 50d - 5000 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$

Használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét.

$$\tfrac{-50\pm\sqrt{2500+20000}}{2}$$
$$\tfrac{-50\pm\sqrt{22500}}{2}$$
$$\tfrac{-50\pm10\sqrt{225}}{2}$$
$$\tfrac{-50\pm10\cdot15}{2}$$
$$\tfrac{-50\pm150}{2}$$

Vagyis $d_1 = 50$, $d_2 = -100$. **(3 pont)**

Tehát a két lehetséges számhármas: $50, 100, 150$, vagy $200, 100, 0$. **(1 pont)**

2012/13/1. Bevezető Matematika
2. zárthelyi dolgozat megoldások
B csoport

1. feladat A p paraméter mely értékeire van a $(p-2)x^2+2px+2p-3=0$ egyenletnek valós gyöke?

Megoldás: Egy másodfokú egyenletnek akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív. **(1 pont)** Jelen esetben a diszkrimináns értéke:

$$D = (2p)^2 - 4(p-2)(2p-3) \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Vagyis:

$$\begin{aligned} (2p)^2 - 4(p-2)(2p-3) &\geq 0 && \textbf{(0,5 pont)} \\ 4p^2 - 4(p-2)(2p-3) &\geq 0 && \textbf{(0,5 pont)} \\ 4p^2 - 4[2p^2-3p-4p+6] &\geq 0 && \textbf{(1 pont)} \\ 4p^2 - 4[2p^2-7p+6] &\geq 0 && \textbf{(0,5 pont)} \\ p^2 - [2p^2-7p+6] &\geq 0 && \textbf{(0,5 pont)} \\ p^2 - 2p^2 + 7p - 6 &\geq 0 && \textbf{(0,5 pont)} \\ -p^2 + 7p - 6 &\geq 0 && \textbf{(0,5 pont)} \end{aligned}$$

A bal oldalon álló másodfokú kifejezés gyöktényezős alakjának meghatározásához használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét.

$$\frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{-2}$$
$$\frac{-7 \pm 5}{-2}$$

Vagyis $p_1 = 1$, $p_2 = 6$. Tehát $-p^2+7p-6 = (p-1)(p-6)$. **(2 pont)**

Egy másodfokú kifejezés értéke -ha a főegyüttható negatív- a két gyök között pozitív, a gyököknél nulla, egyéb esetekben negatív. **(1 pont)** Vagyis $1 \leq p \leq 6$ diszkrimináns értéke nemnegatív, vagyis ekkor lesz az eredeti egyenletnek valós megoldása. **(2 pont)**

2. feladat Oldja meg a következő egyenletet:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{x+9}{3x+3}}$$

Megoldás: Elsőként értelmezési tartományt kell vizsgálnunk (vagy pedig a legvégén visszahelyettesíteni az összes megoldást!) Az értelmezési tartomány: $\mathrm{R} \setminus \{\frac{1}{2}, -1\}$. **(2 pont)**

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{x+9}{3x+3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right)^{\frac{x+9}{3x+3}} \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\frac{x+9}{3x+3}} \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton **(0,5 pont)**, ezért:

$$\frac{2x+3}{2x-1} = \frac{3(x+9)}{3x+3} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$(2x+3)(3x+3) = 3(x+9)(2x-1) \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel a nevezők nem lehettek egynlők 0-val, a szozások elvégezhetőek voltak.

$$6x^2 + 6x + 9x + 9 = 3(x+9)(2x-1) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$6x^2 + 6x + 9x + 9 = 3[2x^2 - x + 18x - 9] \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$6x^2 + 6x + 9x + 9 = 6x^2 - 3x + 54x - 27 \qquad \textbf{(0,5 pont)}$$

$$36 = 36x \qquad \textbf{(0,5 pont)}$$

$$1 = x \qquad \textbf{(0,5 pont)}$$

Vagyis az egyenlet megoldása az $x = 1$, ami láthatóan benne van az értelmezési tartományban.

3. feladat Oldja mega következő egyenletet:

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x = 3 - \sin x$$

Megoldás:

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x = 3 - \sin x$$

$$\sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x) = 3 - \sin x \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$\sin^2 x + 3 - 3\sin^2 x) = 3 - \sin x \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$-2\sin^2 x + 3 = 3 - \sin x \quad \textbf{(1 pont)}$$

Akár az $a = \sin x$ új változót bevezetve, akár anélkül $\sin x$-re megoldva az egyenletet kapjuk, hogy:

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$\sin^2 x(2\sin x - 1) = 0 \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$\sin x = 0 \text{ vagy } \sin x = \frac{1}{2} \quad \textbf{(1,5 pont)}$$

- Az első eset:

$$\sin x = 0$$

$$x = 0 + 2k\pi \qquad k \in \mathrm{Z} \text{ vagy } x = \frac{\pi}{+}2l\pi \qquad l \in \mathrm{Z} \quad \textbf{(2 pont)}$$

  Ezt máshogy megfogalmazva: $x = m\pi \qquad m \in \mathrm{Z}$

- A második eset:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad n \in \mathrm{Z} \text{ vagy } x = \frac{5\pi}{6} + 2p\pi \qquad p \in \mathrm{Z} \quad \textbf{(2,5 pont)}$$

4. feladat Egyszámtani sorozat második és negyedik elemének összege 16, ötödik és hetedik elemének összege 52. Mennyi az első hét elem összege?

   Megoldás:

   A számtani sorozatról tudjuk, hogy $a_n = a_{n-1} + d$, ahol a_n az n-dik elem, d pedig a differencia. Fejezzük ki a feladatban említett elemeket a_2 segítségével! (Persze bármelyik másikkal, pl a_1-gyel is kifejezhetjük a többit, ez is jó megoldás lehet.)

$$a_4 = a_2 + 2d \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$a_5 = a_2 + 3d \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$a_7 = a_2 + 5d \quad \textbf{(1 pont)}$$

   A feladat szövege alapján ezek segítségével két egyenletet tudunk felírni:

$$\begin{cases} a_2 + a_2 + 2d = 16 \\ a_2 + 3d + a_2 + 5d = 52 \end{cases} \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$\begin{cases} 2a_2 + 2d = 16 \\ 2a_2 + 8d = 52 \end{cases} \quad \textbf{(1 pont)}$$

   Az első egyenletet kivonva a másodikból egy elsőfokú egyenletet kapunk d-re:

$$6d = 36 \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$d = 6 \quad \textbf{(1 pont)}$$

   Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe kapjuk, hogy

$$2a_2 + 12 = 16 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$
$$2a_2 = 4 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$
$$a_2 = 2 \quad \textbf{(0,5 pont)}$$

Ebből következik, hogy $a_1 = a_2 - d = -4$.

Felhasználva a számtani sorozat első n tagjára vonatkozó összegképletet, kapjuk:

$$S_7 = 6 \cdot a_1 + d\frac{6 \cdot 7}{2} = -24 + 6\frac{42}{2} = -24 + 6 \cdot 21 = -24 + 126 = 98 \quad \textbf{(2,5 pont)}$$