Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet

A Bevezető matematika tárgy gyakorlati anyaga

Összeállította: Kádasné Dr. V. Nagy Éva
egyetemi docens

Szerkesztette: Nagy Ilona

BME Budapest
2011

Előszó

A BME MI oktatóinak sokéves tapasztalata szerint a felsőfokú tanulmányok elkezdésekor azok a hallgatók küzdenek nagyobb nehézségekkel a matematikát igénylő tárgyakban, akik a középiskolai matematika lényegi részeiben nem eléggé járatosak. Ebben segít a Bevezető matematika tárgy.
A tárgyi tartalom azon részeket emeli ki a középiskolai anyagból, amelyeket feltétlenül és nagy biztonsággal tudni és használni kell. Erre épülnek a további tanulmányok matematikából.
A tárgy oktatóit igyekezett a MI úgy megválasztani, hogy minél eredményesebb és hatékonyabb legyen a közös munka.
A foglalkozásokon való részvétel kötelező, azt ellenőrizni is fogjuk. A rendszeres jelenléten kívül természetesen rendszeres tanulás és példamegoldás is szükséges.
Ajánlott irodalomként a középiskolai tankönyvek mellett ajánljuk a

Thomas-féle Kalkulus 1.

egyetemi tankönyvet.
Bármilyen további probléma, kérdés, javaslat esetén forduljanak bizalommal a tárgyfelelőshöz:

Kádasné Dr. V. Nagy Éva docens
H épület 413. szoba
email: vnagye@math.bme.hu
mobil: +36-30-960-6020

vagy

Nagy Ilona
H épület 309. szoba
email: nagyi@math.bme.hu

A tárgy tematikája heti bontásban

1. gyakorlat (3. hét)	Elemi algebrai műveletek (zárójelhasználat, műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel)
2. gyakorlat (4. hét)	A logaritmus fogalma, műveletek logaritmust tartalmazó kifejezésekkel; arány- és százalékszámítás
3. gyakorlat (5. hét)	Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk (értelmezési tartomány, zérushely, összetett függvény, inverz függvény, szélsőérték)
4. gyakorlat (6. hét)	**1. zárthelyi (45 perc)**; egyismeretlenes algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek
5. gyakorlat (7. hét)	Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek
6. gyakorlat (8. hét)	Trigonometrikus azonosságok és trigonometrikus egyenletek
7. gyakorlat (9. hét)	Számtani és mértani sorozatok; két- és háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása
8. gyakorlat (10. hét)	**2. zárthelyi (45 perc)**; síkvektorok, térvektorok, koordinátageometria
9. gyakorlat (11. hét)	**Pótzárthelyi**; síkidomok kerülete, területe; testek
12. hét	Jegy eldöntése, pótzh megtekintése, Neptunba való jegybeírás
13. hét	Nulladik zárthelyi pótlása

1. gyakorlat

Műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel

1. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét segédeszközök használata nélkül:

a) $3[(-2)-(-3)]+(-2)(-3)$

b) $\dfrac{4\{[(2-3)\cdot 5+4]\cdot 2+3\}+10}{7}$

c) $\left[\left(\dfrac{3(7+2)-8}{-3}+7\right)\cdot 2\right] : \dfrac{-6}{(-3)(-2)}$

d) $6^{-3}\cdot(-2)^5\cdot 12^{-1}\cdot(-3)^4$

e) $\dfrac{26^{-4}\cdot 25^{-4}}{60^{-8}}+\left[\left(\dfrac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{-\frac{3}{2}}$

f) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\dfrac{36}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(8^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2}$

g) $\left(\dfrac{12^4\cdot 5^5}{3^4} : \dfrac{2^7\cdot 55^6}{(-11)^6}\right)^{-2}$

2. Írja fel prímhatványok szorzataként:

a) $24^2\cdot 42^3\cdot 12^2\cdot 28\cdot 18^3$

b) $\dfrac{3^5\cdot 8^5\cdot 20^4\cdot 49}{16^4\cdot 6^4\cdot 70^2}$

3. Számolja ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül:

a) $\dfrac{2^{10}+2^{11}-2^{12}}{2^9+2^{10}}$

b) $\dfrac{1,6\cdot 10^{-3}\cdot 2,5\cdot 10^5}{2\cdot 10^{-2}}$

c) $\dfrac{360000\cdot 0,0000025}{0,009}$

d) $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$

e) $\left(\sqrt{16+2\sqrt{55}}-\sqrt{16-\sqrt{220}}\right)^2$

4. Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi számokat:

a) -10^3, $\ln 5$, $\lg 100$, $-\dfrac{7}{8}$

b) $2^{\frac{2}{3}}$, $4^{-\frac{1}{3}}$, $25^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{5}{100}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{27}$

c) $\sin 60°$, $\mathrm{tg} 45°$, $\cos 45°$, $\mathrm{ctg}(-45°)$, $\cos 135°$

d) $\sqrt{(-3)^2}$, $\sin\dfrac{7\pi}{3}$, $\log_3\dfrac{1}{9}$

e) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$, $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$, $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

5. Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

a) $\left(\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^2}\right) : \dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}$

b) $\dfrac{(-2)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^n + 16^{\frac{n}{2}}}$

c) $\dfrac{9^{\frac{n}{2}+1} + \left(\sqrt{3}\right)^{2n+2}}{36^{\frac{n}{2}} + \left(\sqrt{6}\right)^n \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n}$

d) $\dfrac{16^{\frac{n}{2}} - 2^{2n+3}}{125^{\frac{n}{3}} + \left(\sqrt{5}\right)^{2n+2}}$

e) $\dfrac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{(a^2-b^2)^6}{(a-b)^{10}}}$

f) $\dfrac{x^2-25}{x^2-3x} : \dfrac{x^2+5}{x^2-9}$

g) $\dfrac{1 - \dfrac{x^2}{x^2-1}}{2 + \dfrac{3x-1}{1-x}}$

h) $\dfrac{x-4}{x+4} - \dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{16x}{x^2-16}$

i) $\left(\dfrac{2}{x^2-x} - \dfrac{2x}{1-x^2}\right) \cdot \dfrac{2x^2+2x}{x^3-1} + \dfrac{4}{x-1}$

j) $\left(\dfrac{2c}{c+2} - \dfrac{2c}{3c-6} + \dfrac{8c}{c^2-4}\right) \cdot \dfrac{c-2}{c^2-4c}$

k) $\dfrac{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{x}}$

2. gyakorlat

Műveletek logaritmust tartalmazó kifejezésekkel; arány- és százalékszámítás

1. Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket segédeszköz használata nélkül:

a) $\lg \sqrt[3]{1000}$, $\log_2 0,25$, $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\ln \dfrac{1}{e^4}$

b) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5}$, $0,25^{\log_2 3}$, $3^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$

c) $3^{2 - \log_3 10}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{3 - \log_2 5}$, $8^{\log_2 6 - 2}$

d) $(\lg 1,2 + \lg 1,5 - \lg 0,9)$, $(2 \ln 5 - 2)$, $\left(3 \log_2 8 - \dfrac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 16\right)$

2. Fejezze ki A-t az alábbi kifejezésekből:

a) $q = \dfrac{\lg A - \lg C}{\lg 5}$

b) $t = \dfrac{\lg A - \lg B}{\lg 2}$

3. Számolja ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül:

a) $49^{1 - \log_7 2} - 5^{-\log_5 4} + \sin \dfrac{34\pi}{3}$

b) $(\sin 60°)^{\sqrt[3]{8}} + \dfrac{3^{10} + 3^{11}}{3^{12} - 3^{10}} + \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5}$

c) $(-\cos 30°)^{\sqrt[3]{-8}} + 5000000 \cdot 0,000002 + 0,25^{\log_2 3}$

d) $-0,04^{-\frac{1}{2}} \cdot 100^{\lg 5} - 81^{-\frac{3}{4}}$

4. a) Egy kocka oldalait 1 cm-rel csökkentjük, ekkor a térfogata az eredeti kocka felszínének $\frac{1}{6}$ -ával csökken. Mekkora volt a kocka oldala?

   b) Egy kocka oldalait 1 cm-rel növeljük, így a térfogat értéke az eredeti felszín $\frac{7}{6}$ -ával nő. Mekkora volt a kocka oldala?

5. 80000 Ft-ot beteszünk a bankba 10%-os évi kamat mellett. Mennyi pénzünk lesz 5 év múlva?

6. Egy csoport 40 hallgatójának 30%-a kék szemű és 40%-a szőke. Tudjuk, hogy a kék szemű hallgatók $\frac{3}{4}$ -e szőke. Hány olyan hallgató van, aki se nem szőke, se nem kék szemű?

7. Két betét, amelyek közül az első kétszer akkora, mint a második, évente 6325 eurót kamatozik. A kamatláb a nagyobb, illetve a kisebb betétre 4%, illetve 3, 5%. Mekkora volt a két betét értéke?

8. Egy háromszöget egyik középvonala mentén kettévágunk. Milyen területarányú részek keletkeznek?

9. Egy 50 cm sugarú kör sugarát 10 cm-rel csökkentjük. Hány százalékkal csökken a területe?

10. Legyen $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Hány százalékkal változik az f függvény értéke, ha az $x_0 = 1$ értékét

    a) 2%-kal növeljük
    b) 3%-kal csökkentjük?

11. Legyen $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Hány százalékkal kell növelni, illetve csökkenteni az $x_0 = 1$ értékét, ha azt szeretnénk, hogy az f függvény értéke

    a) 1%-kal nőjön
    b) 2, 5%-kal csökkenjen?

12. Árvízi védekezéshez C darab $\frac{p}{q}$ köbméteres tartályt töltöttünk meg homokkal. Hány darab $\frac{m}{n}$ köbméteres tartályba tudtunk volna ugyanennyi homokot betölteni?

13. Egy gép értéke évente 20%-kal csökken. Két év használat után a gépet akkori értékének $\frac{3}{4}$ -éért eladták. Az eredeti értékének hány százalékáért jutott az új tulajdonos a géphez?

14. Fényszűrő lemezeket raknak egymás mögé. Az első elnyeli a ráeső fényenergia 30%-át, a második a ráeső fényenergia 45%-át, a harmadik pedig a ráeső energia 25%-át. A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának hány százalékát nyeli el?

3. gyakorlat

Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk

1. Rajzolja fel az $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{x+5}$ függvény képét! Milyen x esetén lesz $f(x) > 0$? Adja meg $f(1) + f(-1)$ értékét!

2. Rajzolja fel az $f(x) = 3^x$ és $g(x) = 3^{-x}$ függvények képeit! Adja meg $f(a+2) - f(a-2)$ és $g(a+2) - g(a-2)$ értékeit! Határozza meg az $f(g(x))$ és a $g(f(x))$ függvényeket!

3. Rajzolja fel az $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ és $h(x) = |x - \pi|$ függvények képeit! Ezek közül melyik függvény lesz szigorúan monoton növő a $(0, \pi)$ intervallumon?

4. Adja meg az alábbi függvények zérushelyeit és értelmezési tartományát:

   a) $f(x) = \dfrac{2x(x-2)^2 - 2(x-2) \cdot x^2 \cdot 2}{(x-2)^4}$

   b) $g(x) = \dfrac{4(x^2-1) \cdot x \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^2-1)^2}{x^6}$

   c) $h(x) = \dfrac{2x(x^2-4)^2 + 2(x^2-4) \cdot 3x \cdot x^2}{(x^2-4)^4}$

5. Legyen $f(x) = \ln^2 x$ és $g(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

   a) $f(g(x)) = ?$ $\quad f(g(0)) = ?$

   b) $g(f(x)) = ?$ $\quad g(f(1)) = ?$

6. Legyen $f(x) = e^{x^2}$ és $g(x) = \sin 3x$.

   a) $f(g(0)) = ?$

   b) $g(f(0)) = ?$

7. Ábrázolja az alábbi függvényeket, adja meg az inverzüket, és ezt is ábrázolja!

   a) $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x+3}, \quad x > 0$

   b) $g(x) = 2^{x-1} + 1$

   c) $h(x) = 2 \ln x + 1$

   d) $l(x) = \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

8. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

   a) $f(x) = \begin{cases} 5 - |x|, & \text{ha } x \geq -1 \\ e^{-x}, & \text{ha } x < -1 \end{cases}$

   Mivel egyenlő $f(1)$ és $f(-2)$?

   b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{ha } |x| > 1 \\ x^3, & \text{ha } |x| \leq 1 \end{cases}$

   Adja meg a g függvény minimális és maximális értékét a $[-3, 2]$ intervallumon!

   c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{ha } x \leq 2 \\ (x-2)(4-x), & \text{ha } x > 2 \end{cases}$

   Adja meg a h függvény lokális minimum- és maximumhelyeit a $[-2, 5]$ intervallumon!

9. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tarományait és zérushelyeit:

   a) $f(x) = \ln\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

   b) $g(x) = 3 - \sqrt{1-2x}$

4. gyakorlat

Egyismeretlenes algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek

1. Határozza meg a b és c paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy minden x valós számra $(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6$.

2. a) $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10, \quad x = ?$

   b) $\dfrac{7}{7-x} > 0, \quad x = ?$

   c) Melyik az a másodfokú egyenlet, amelynek két gyöke $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ és $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$?

   d) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{15}, \quad x = ?$

   e) $|2x-4| < 6, \quad x = ?$

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

   a) $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 = 0$

   b) $\left(1 + \dfrac{4}{x^2+x-6}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x+1} + 1\right) = 0$

   c) $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$

   d) $\dfrac{x+3}{x-4} + \dfrac{22}{x^2-16} = \dfrac{7x+6}{x+4} - \dfrac{3}{x-4}$

4. Adja meg a megoldásokat az a paraméter függvényében:

   a) $(ax-1)^2 + (x-a)^2 = x^2 - 2 + a^2$

   b) $(ax+1)^2 + (ax+1)(ax-1) = 4$

   c) $(1-a)x^2 + x + a = 0$

5. Legyen x_1 és x_2 az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet két megoldása. Bizonyítsa be, hogy

   a) $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$

   b) $x_1 + x_1x_2 + x_2 = q - p$

   c) $(x_1 - x_2)^2 = p - 4q$

   d) $(x_1 + x_2)^2 = p^2$

6. a) Milyen k valós szám esetén van az $x^2 - kx + (3-k) = 0$ egyenletnek két azonos megoldása?

   b) Milyen k valós szám esetén van az $x^2 - (k+3)x + 4 = 0$ egyenletnek két különböző valós megoldása?

   c) Milyen k valós szám esetén nincs valós megoldása az $x^2 + kx - (2k-5) = 0$ egyenletnek?

7. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola csúcspontja $M(1, -1)$, a parabola és az x tengely egyik metszéspontja 2. Határozza meg a, b, c értékét!

5. gyakorlat

Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2^{|x+1|+x} = 2$

b) $x + 3\sqrt[3]{x^2} - 18\sqrt[3]{x} = 0$

c) $\dfrac{1+4^{x-1}}{4^x} = \dfrac{17}{2^{x+3}}$

d) $\lg\sqrt{x^2-3x} - \lg\sqrt{3-x} = \lg 5$

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{9^x + 7 - 3^{x+2}} > 3^x - 5$

b) $4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$

c) $\ln(x^2 + x - 6) = \ln\dfrac{x-2}{x+3}$

d) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}}$

f) $\sqrt{\dfrac{2}{3} - 5x} - \sqrt{3x + \dfrac{1}{2}} = 0$

3. Oldja meg a valós számok halmazán:

a) $2(\lg 2 - 1) + \lg(x^3 + 1) = \lg\left(\dfrac{5}{x^3} + 3\right)$

b) $\sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x+2}} = 1$

c) $(x+2)\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 0$

d) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$

e) $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{x+1}{x-2}$

f) $3^{2x^2+2x-12} = 9^{\frac{x-2}{x+3}}$

g) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$

4. Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket segédeszköz használata nélkül:

a) $\lg\sqrt[3]{1000}$, $\log_2 0,25$, $\log_3\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\ln\dfrac{1}{e^4}$, $10^{\lg 5}$

b) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5}$, $0,25^{\log_2 3}$, $3^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$, $e^{\ln 4}$, $2^{\log_2 5}$

c) $3^{2-\log_3 10}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{3-\log_2 5}$, $8^{\log_2 6 - 2}$, $2^{2\log_2 3}$, $\left(2^{\log_2 3}\right)^2$

5. Számítsa ki az x értékét:

a) $\lg x = \lg 1,2 + \lg 1,5 - \lg 0,9$

b) $\ln x = 2\ln 5 - 2$

c) $\ln x = 3\log_2 8 - \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 16$

6. gyakorlat

Trigonometrikus azonosságok és egyenletek

1. Töltse ki az alábbi táblázatot segédeszköz használata nélkül:

	$0°$	$30°$	$60°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$315°$	$300°$	$360°$
$\sin\varphi$													
$\cos\varphi$													
$\mathrm{tg}\varphi$													

2. Határozza meg a hiányzó értékeket a φ meghatározása nélkül:

$\sin\varphi$	$\frac{3}{4}$		$\frac{8}{17}$			
$\cos\varphi$		$\frac{5}{12}$			$\frac{63}{65}$	
$\mathrm{tg}\varphi$				$\frac{35}{12}$		$\frac{21}{20}$

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket segédeszköz használata nélkül:

a) $\sin 2\varphi = 1$ b) $\cos 2\varphi = 0$ c) $\mathrm{tg}2\varphi = 0$ d) $\mathrm{tg}2\varphi = 1$

e) $\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\mathrm{ctg}3\varphi = 1$ g) $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$ h) $\mathrm{ctg}3\varphi = \sqrt{3}$

i) $\sin\frac{\varphi}{2} = 1$ j) $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ k) $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = 1$ l) $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

m) $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$ n) $\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{3} = \sqrt{3}$ o) $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ p) $\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket segédeszköz használata nélkül:

a) $\sin^2\varphi = 1$ b) $\cos^2\varphi = 1$ c) $\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{1}{3}$

d) $\sin\varphi = \mathrm{ctg}\varphi$ e) $\sin\varphi = -\mathrm{ctg}\varphi$ f) $\cos\varphi = \mathrm{tg}\varphi$

5. Fejezze ki minden $\varphi \in [0, 90°)$ esetén

a) $\sin\varphi$-t $\mathrm{tg}\varphi$ segítségével, b) $\cos\varphi$-t $\mathrm{tg}\varphi$ segítségével,

c) $\mathrm{tg}\varphi$-t $\sin\varphi$ segítségével, d) $\mathrm{tg}\varphi$-t $\cos\varphi$ segítségével!

6. Adja meg az α-t segédeszköz használata nélkül, ha

a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$

c) $\mathrm{tg}\alpha = 1$ és α a harmadik síknegyedben van.

7. Hozza egyszerűbb alakra:

   a) $\sin\varphi(\mathrm{tg}\varphi + \mathrm{ctg}\varphi) + \cos\varphi(\mathrm{tg}\varphi + \mathrm{ctg}\varphi)$

   b) $(\sin\varphi - \cos\varphi)(1 + \sin\varphi\cos\varphi) + (\sin\varphi + \cos\varphi)(1 - \sin\varphi\cos\varphi)$

8. a) $\mathrm{tg}\dfrac{21\pi}{4} + \sqrt[5]{\sin(-7\pi)} = ?$

   b) $\log_\pi\left[\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^2 - \sin\dfrac{4\pi}{3}\right] = ?$

9. Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

   a) $8\cos 2x + 7\cos^2 x = 5\sin x + \dfrac{27}{4}, \quad x \in [0, \pi]$

   b) $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^2x + \mathrm{ctg}x + \mathrm{ctg}^2x = 4, \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

   c) $\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos 2x = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$

10. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

    a) $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$

    b) $3\cos 2x = -\sin x + 3$

    c) $4\cos^2 x + 8\sin x + 1 = 0$

    d) $\sin 2x(\cos 2x + 1) + \sin x(\cos 2x - 5) = 0$

11. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

    a) $\cos x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x = \dfrac{1}{\cos x}$

    b) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{5}{4}$

    c) $\dfrac{\cos 2x}{\mathrm{ctg}^2x - \mathrm{tg}^2x} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

12. Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét segédszköz használata nélkül:

    a) $\cos 15° \cdot \sin 15°$

    b) $\sin 30° \cdot \cos 15° + \cos 30° \cdot \sin 15°$

    c) $\cos 10° \cdot \cos 20° - \sin 10° \cdot \sin 20°$

    d) $\sin 70° \cdot \sin 40° + \dfrac{1}{2}\cos 110°$

    e) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$

    f) $\cos^2 22,5°$

7. gyakorlat

Sorozatok; két- és háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása

1. Legyen az (a_n) számtani sorozat, melyben $a_5 = 17$, $a_7 = 10$.

   a) $a_1 =?$ b) $d =?$ c) $\sum_{i=1}^{8} a_i =?$

2. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe 150 cm^2. Mekkorák az oldalak?

3. Legyen az (a_n) számtani sorozat. $d = 0,5$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 38$ és $\sum_{i=1}^{n+4} a_i = 69$. Mennyi a_1 és n?

4. Legyen az (a_n) számtani sorozat, melyben $a_1+a_2+a_3 = -12$ és $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$. Határozza meg a sorozat első három tagját!

5. Legyen az (a_n) mértani sorozat, melyben $a_1 + a_2 + a_3 = 39$ és $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729$. Határozza meg a sorozat első három tagját!

6. Legyen az (a_n) mértani sorozat.

   a) $a_2 = 3$, $a_6 = 12$. $S_{10} =?$

   b) $a_3 = 3$, $a_9 = 24$, $S_{12} =?$

   c) $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6$. $a_1 =?$, $q =?$

7. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 25. Az első, második és ötödik egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Határozza meg, hogy mennyi az a_1, a d és a q!

8. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha az elsőhöz 6-ot, a másodikhoz 13-at és a harmadikhoz 30-at adunk, akkor egy mértani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Mi a számtani sorozat?

9. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 63. Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Mi a mértani sorozat?

10. Egy számtani sorozat 12. tagja, valamint az első n tagjának összege is 0. A sorozat első $(2n - 1)$ darab tagjának az összege 495. Adja meg a sorozat első $3n$ tagjának összegét!

11. Egy (a_n) számtani sorozatban $a_1 = \sqrt{2}$. Az a_1, a_2, a_4 ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három tagja. Adja meg a mértani sorozat első 10 tagjának összegét!

12. Egy számtani sorozat első négy tagja a_1, a_2, a_3, a_4. Az a_1, a_2, $a_3 + 5$, $a_4 + 20$ számok egy mértani sorozat első négy tagjának reciprokaival egyenlők. Határozza meg a mértani sorozat első tagját és a hányadosát!

Egyenletrendszerek

1. $$\left.\begin{aligned} x^2+xy&=210\\ y^2+xy&=231\end{aligned}\right\}$$

2. $$\left.\begin{aligned} xy+x+y&=29\\ xy-2x-2y&=2\end{aligned}\right\}$$

3. $$\left.\begin{aligned} (2x+y)^2&=16\\ x-\frac{1}{y}&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}$$

4. $$\left.\begin{aligned} x^2-6xy+9y^2&=25\\ x+\frac{1}{y}&=9\end{aligned}\right\}$$

5. $$\left.\begin{aligned} x+\frac{3}{4}y&=9\\ \frac{x}{2}-\frac{2y}{3}&=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}$$

6. $$\left.\begin{aligned} \frac{x+2}{3}-\frac{y-3}{4}&=3\\ \frac{3}{x+2}-\frac{1}{y-3}&=0\end{aligned}\right\}$$

7. $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x-2y}-\frac{2}{2x-y}&=3\\ -\frac{2}{x-2y}+\frac{5}{2x-y}&=-5\end{aligned}\right\}$$

8. $$\left.\begin{aligned} \frac{10}{x-5}+\frac{1}{y-2}&=1\\ \frac{25}{x-5}+\frac{3}{y+2}&=2\end{aligned}\right\}$$

9. $$\left.\begin{aligned} y-x&=44\\ \sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}}&=\frac{5}{2}\end{aligned}\right\}$$

10. $$\left.\begin{aligned} 3^x+4^y&=73\\ 3^x\cdot 4^y&=576\end{aligned}\right\}$$

11. $$\left.\begin{aligned} 2x-4\sqrt{x}+y-4&=0\\ 5\sqrt{x}-y&=17\end{aligned}\right\}$$

12. $$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{2}+y&=4\\ y^2-\sqrt{x}&=27\end{aligned}\right\}$$

13. $$\left.\begin{aligned} 3^{\log_3 x}-2^{\log_4 y}&=77\\ 3^{\log_3 \sqrt{x}}-2^{\log_{16} y}&=7\end{aligned}\right\}$$

14. $$\left.\begin{aligned} \log_2(xy)&=5\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)&=1\end{aligned}\right\}$$

15. $$\left.\begin{aligned} 8^{2x+1}&=32\cdot 2^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}&=\sqrt{25^{2y+1}}\end{aligned}\right\}$$

16. $$\left.\begin{aligned} 3^y\cdot 9^x&=81\\ \lg(x+y)^2-\lg x&=2\lg 3\end{aligned}\right\}$$

17. $$\left.\begin{aligned} 3\cdot 2^{x+y}-5\cdot 2^{x-y}&=182\\ 5\cdot 2^x\cdot 2^y-4\cdot 2^x\cdot 2^{-y}&=312\end{aligned}\right\}$$

18. $$\left.\begin{aligned} 4x-5y&=7\\ 2x+y&=7\\ 8x-17y&=5\\ 3x+y&=10\end{aligned}\right\}$$

19. $$\left.\begin{aligned} x+y&=2\\ x-z&=3\\ x-y+z&=2\end{aligned}\right\}$$

20. $$\left.\begin{aligned} -x+2y+z&=2\\ x+3z&=-2\\ 2x+y+z&=3\end{aligned}\right\}$$

8. gyakorlat

Síkvektorok, térvektorok, koordinátageometria

1. Legyenek $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 2)$ és $\mathbf{c} = (5, -1)$. Adja meg a következő vektorokat:
   a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} =?$ b) $3(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) =?$ c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} =?$
   d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) =?$ e) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =?$

2. Legyenek $\mathbf{a} = (2, 5)$, $\mathbf{b} = (-10, 2)$ és $\mathbf{c} = (-6, 12)$.
   a) Bontsa fel a $\mathbf{c}$ vektort $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel párhuzamos összetevőkre!
   b) Bontsa fel a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{c}$-vel párhuzamos és $\mathbf{c}$-re merőleges összetevőkre!
   c) Adjon meg $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$-re merőleges egységnyi hosszú vektort!

3. Legyen $\mathbf{a} = (4, 3)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2)$.
   a) Mennyi az $\mathbf{ab}$ skaláris szorzat?
   b) Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által bezárt szög?

4. Adott három pont: $A(2, 0)$, $B(-5, 4)$, $C(-1, 3)$.
   a) Mekkorák az ABC háromszög szögei?
   b) Adja meg az összes lehetséges $D(x, y)$ pontot úgy, hogy a pontok egy paralelogramma csúcspontjai legyenek!

5. Adott három vektor: $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{c} = (1, -2, -3)$.
   a) Ábrázolja a vektorokat!
   b) Adja meg a következő vektorok koordinátáit: $2\mathbf{a}$, $\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$.
   c) Írja fel az $\mathbf{a}$-n átmenő, $\mathbf{b}$-vel párhuzamos egyenes vektoregyenletét! Rajta van-e ezen az egyenesen az $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}$ vektor?
   d) Adjon meg egy olyan $\mathbf{d}$ vektort, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok végpontjai paralelogrammát alkossanak!
   e) Az alábbi vektorok közül melyek azok, amelyek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ számszorosai összegeként előállíthatók: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

6. Adott két pont: $A(2, 6)$ és $B(-3, 2)$. Adja meg
   a) az A és B távolságát!
   b) az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjának koordinátáit!
   c) az A, B pontokon átmenő egyenes egyenletét!
   d) az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!
   e) azt a pontot, amely A-tól és B-től is 5 egység távolságra van!
   f) annak a körnek az egyenletét, amelynek az $\overline{AB}$ szakasz egy átmérője!

7. Adott két egyenes: $g : 5x - 4y = 14$, $h : 2x - 3y = 3$ és a $P(5, 2)$ pont. Adja meg
   a) a két egyenes metszéspontjának a P-től való távolságát.
   b) azon egyenes egyenletét, amely átmegy a P-n
      i. és a két egyenes metszéspontján.
      ii. és párhuzamos g-vel.
      iii. és merőleges h-ra.
   c) a P pont és a h egyenes távolságát!

8. A paraméterek mely értékeire lesz köregyenlet:
   a) $x^2 + y^2 + 4x + 10y + a = 0$?
   b) $4x^2 + Ay^2 - 32x + 24y + Bxy + C = 0$?

9. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P(6, 1)$ ponton, és érinti
   a) az x tengelyt
   b) az y tengelyt!

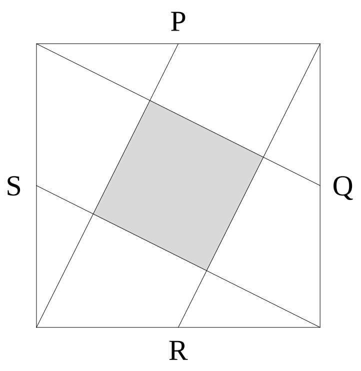
10. A $C(-1, 2)$ középpontú kör átmegy a $P(3, -2)$ ponton.
    a) Mekkora a kör sugara?
    b) Adja meg a kör egyenletét!

11. Írja fel az $A(2, 1)$ ponton átmenő, $2y + 3x = 10$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletét! Hol metszi ez az egyenes az x tengelyt?

9. gyakorlat

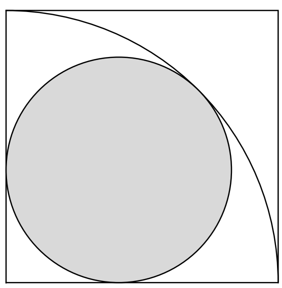
Síkidomok kerülete, területe; testek

1. Mekkora a satírozott rész területe, ha a P, Q, R, S pontok az egységnyi oldalú négyzet oldalfelező pontjai?

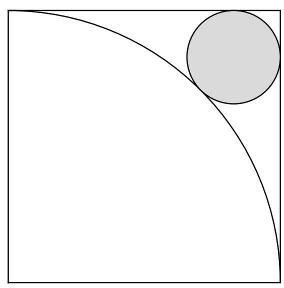


2. Mekkora az ábrán látható körlemez sugara, ha a négyzet oldala egységnyi hosszú?

a)



b)



3. Írjon fel egy olyan összefüggést, amely segítségével a megadott adatokból a kérdéses mennyiség kiszámítható.

<table>
<tr><th>Ismert</th><th>Számítandó</th><th>Összefüggés</th></tr>
<tr><td>Egy háromszög két szomszédos oldala: a, b és a közbezárt szög: γ</td><td>a háromszög területe</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Egy szabályos háromszög oldala: a</td><td>terület</td><td></td></tr>
<tr><td>magasság</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Egy szabályos háromszög magassága: m</td><td>terület</td><td></td></tr>
<tr><td>oldalhossz</td><td></td></tr>
</table>

4. Egy derékszögű háromszög átfogója 41 cm, területe 180 cm^2. Mekkorák a befogók?
5. Egy téglalap oldalai $AB = 9$ cm, $BC = 3$ cm. Az AB oldalnak melyik P pontja van A-tól és C-től egyenlő távolságra?
6. Mekkorák a szimmetrikus trapéz alapjai, ha középvonala 45 mm, szára 41 mm, magassága 9 mm?
7. Az egységnyi területű rombusz egyik szöge 150°. Mekkorák a rombusz oldalai és átlói?
8. Egy téglalap egyik oldala 2 cm. A téglalap átlójának mérőszáma megegyezik területének mérőszámával. Bizonyítsa be, hogy a téglalap átlója az egyik oldallal 30°-os szöget zár be.
9. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 12 dm, magassága 6 dm. Mekkora annak a kockának az éle, amelynek négy csúcsa a gúla alapján, másik négy csúcsa pedig a gúla oldalélein van?
10. Egy forgáskúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója 20 cm. A kúpba azzal közös tengelyű, egyenlő oldalú hengert írunk. Mekkora a henger térfogata? (Az egyenlő oldalú henger tengelymetszete négyzet.)
11. Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írt egyenes körkúp alapkörének sugara 12 cm, alkotója pedig 32 cm?
12. Írjon egy forgáskúpba érintőgömböt! Számítsa ki a gömb és a kúp térfogatának az arányát!
13. Egy félgömbbe kockát helyezünk el úgy, hogy négy csúcsa határkörének síkjába, négy csúcsa pedig a félgömbbe essék. Mekkora a félgömb sugara, ha a kocka éla a?